Esercizio 1156
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Mostrare che l'area della regione del piano situata nel primo quadrante, individuata dalla parabola $y = -x^2 + a^2$ e dalla retta $y = -x + a^2$, è indipendente dal parametro reale a.

***

Soluzione
Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = -x^2 + a^2 \\ y = -x + a^2 \end{cases},$$

cioè:

$$x = 0, 1$$

come riportato in fig. 1

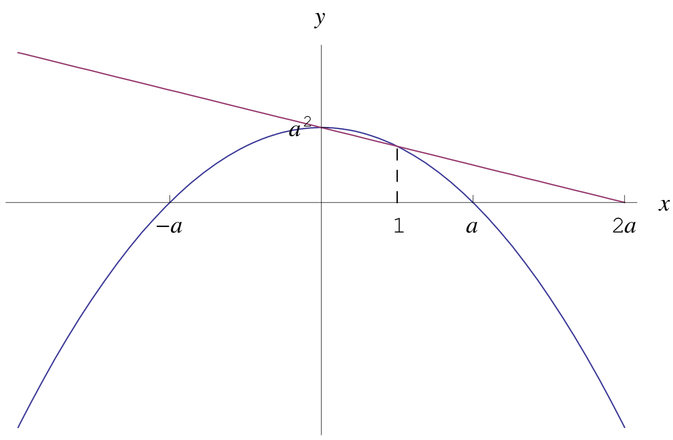

Figure 1:

La regione che ci interessa è:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \ -x + a^2 \leq y \leq -x^2 + a^2\right\},$$

Quindi l'area richiesta è:

$$S = \int_0^1 \left(-x^2 + a^2 + x - a^2\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \frac{1}{6},$$

cioè è indipendente dal parametro a.