Esercizio 1153
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la sommabilità della funzione:

$$f(x) = |x|^{\beta} e^{-|x|^{\gamma}}, \quad (\beta, \gamma > 0)$$

nell'intervallo $A = (-\infty, +\infty)$.

***

Soluzione
In forza della parità della funzione, studiamo la sommabilità per $x \to +\infty$. Osserviamo che la funzione è infinitesima all'infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} |x|^{\beta} e^{-|x|^{\gamma}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^{\gamma}}}{x^{-\beta}} = 0$$

Assumendo come infinitesimo di riferimento $g(x) = x^{-1}$, imponiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^{-\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha} e^{-x^{\gamma}}}{x^{-\beta}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^{\gamma}}}{x^{-\beta-\alpha}} = l \in (0, +\infty)$$

Posto $n = \beta + \alpha > 0$, segue:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^{\gamma}}}{x^{-\beta-\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^{\gamma}}}{x^{-n}} = 0, \, \forall n > 0$$

Quindi, per $x \to +\infty$, la funzione è un infinitesimo di ordine infinitamente grande, onde la funzione è sommabile in $[0, +\infty)$, e grazie alla parità di f, si conclude che la funzione è sommabile in A.

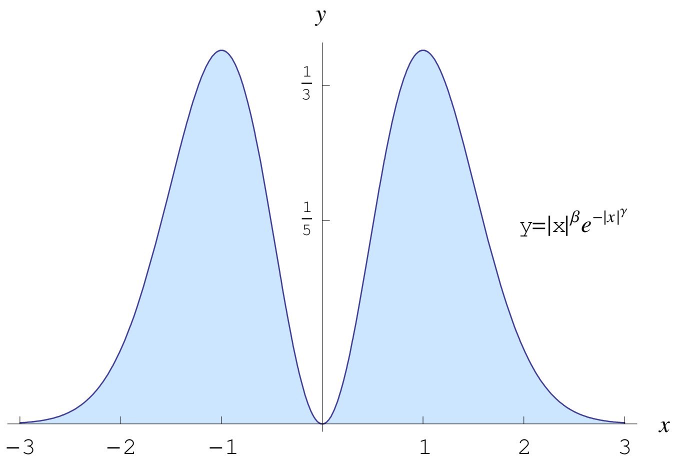

Figure 1: