Esercizio 1151
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la sommabilità della funzione:

$$f(x) = e^{-x},$$

nell'intervallo $A = [0, +\infty)$.

***

Soluzione
La funzione è manifestamente infinitesima all'infinito:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

Assumendo come infinitesimo di riferimento $g(x) = x^{-1}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{-\alpha}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \alpha \lim_{x\to+\infty} \frac{(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}}{e^{x}} \\ &= \alpha(\alpha-1) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-2}}{e^{x}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\end{aligned}$$

D'altro canto questo era un risultato noto, e cioè e^{-x} è - per $x \to +\infty$ - un infinitesimo di ordine infinitamente grande. Si conclude che la funzione è sommabile:

$$\int_A e^{-x} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{D_n} e^{-x} dx,$$

essendo $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to+\infty} D_n = A$. Assumiamo $D_n = [0, n]$, quindi:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n e^{-x} dx = 1$$