

Esercizio 1148
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Determinare le coordinate dei punti di intersezione della parabole γ_1) $y = 2x^2 + 1$, γ_2) $y = x^2 + 5$, calcolando poi l'area della regione del piano limitata dagli archi delle due curve aventi per estremi i suddetti punti di intersezione.

Soluzione

Per determinare le coordinate dei punti di intersezione, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 1 \\ y = x^2 + 5 \end{cases} ,$$

cioè:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$$

Quindi:

$$A(-2, 9), B(2, 9) \in \gamma_1 \cap \gamma_2$$

La superficie racchiusa tra i due luoghi geometrici è riportata in figura 1

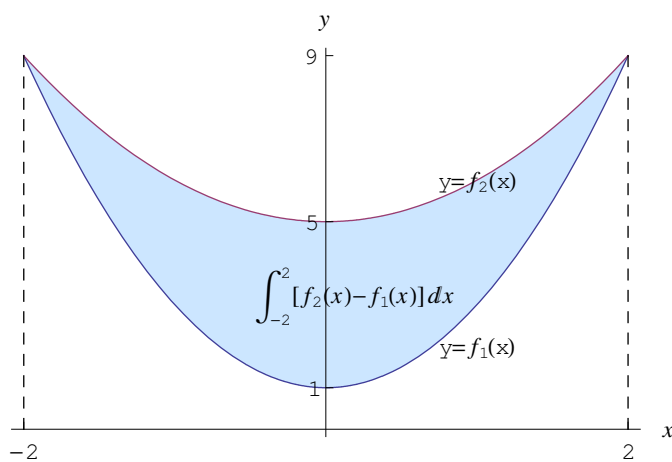


Figure 1:

Quindi:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2, 2x^2 + 1 \leq y \leq x^2 + 5\} ,$$

L'area richiesta è:

$$\begin{aligned} S = \text{mis } \mathcal{R} &= \int_{-2}^2 (x^2 + 5 - 2x^2 - 1) dx = \\ &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx \\ &= -\frac{1}{3} x^3 \Big|_{-2}^2 + 4 x \Big|_{-2}^2 \\ &= -\frac{16}{3} + 16 = \frac{13}{3} \end{aligned}$$