Esercizio 1143
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare l'area della regione del piano limitata dalle due parabole $y = -x^2 + x + 2$, $y = x^2 - 3x + 2$.

***

Soluzione

Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione delle due curve

$$\begin{cases} y = -x^2 + x + 2 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases},$$

cioè:

$$x = 0, y = 2 \Longrightarrow A(0, 2)$$
$$x = 2, y = 0 \Longrightarrow B(2, 0)$$

La superficie racchiusa tra le due parabole è riportata in figura 1

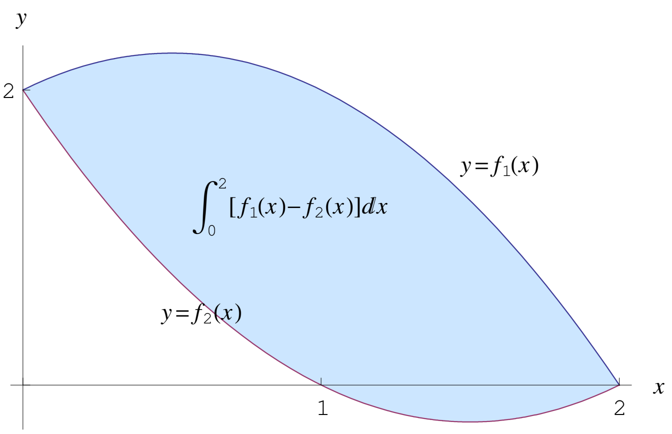

Figure 1:

Quindi:

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ f_2(x) \leq y \leq f_1(x)\right\},$$

essendo:

$$f_1(x) = -x^2 + x + 2, \quad f_2(x) = x^2 - 3x + 2$$

L'area richiesta è:

$$
\begin{aligned}
S = \operatorname{mis}\mathcal{R} = \int\limits_0^2 \left[f_2\left(x\right) - f_1\left(x\right)\right] dx = \\
&= \int\limits_0^2 \left(-2x^2 + 4x\right) dx \\
&= -2\int\limits_0^2 x^2 dx + 4\int\limits_0^2 dx \\
&= -\frac{2}{3}\left. x^3\right|_0^2 + 2\left. x^2\right|_0^2 \\
&= -\frac{2}{3}\left(8 - 0\right) + 8 = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$