Esercizio 1137
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare l'area del rettangoloide generalizzato relativo alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

e di base $A = [-1, 1]$.

***

Soluzione
Tale funzione è generalmente continua in A. L'insieme delle singolarità è:

$$S = \{-1, 1\}$$

Più precisamente:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

Inoltre $\forall x,\ f(x) > 0$.
Il rettangoloide generalizzato è:

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ 0 < y \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right\}$$

Costruiamo la successione $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$D_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

come mostrato in figura 1.
Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{n \to +\infty} \int_{-1+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left[\arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \arcsin\left(-1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi,
\end{aligned}$$

donde:

$$misU = \pi$$

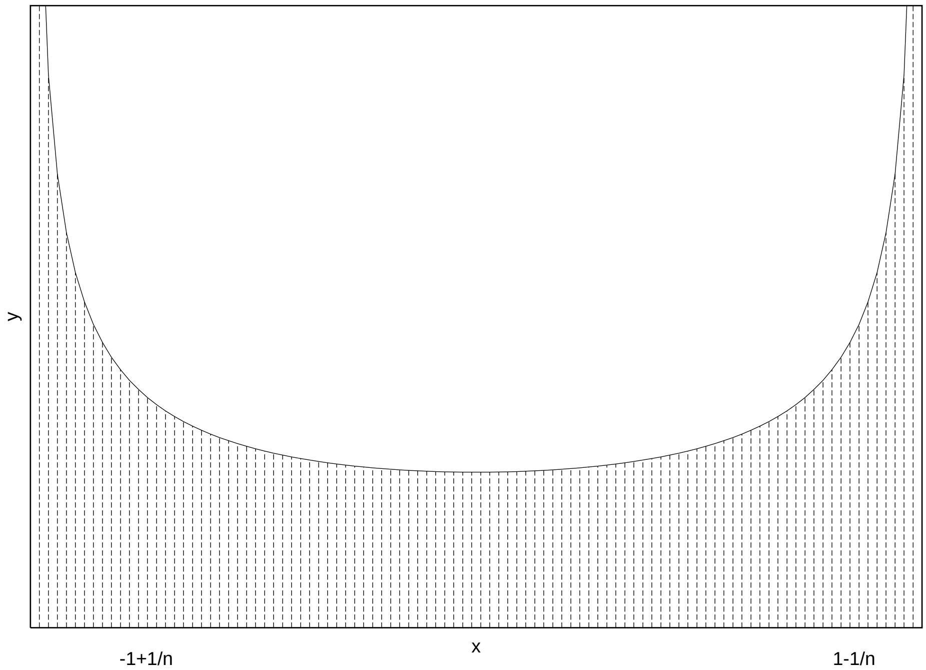

Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.