

Esercizio 1134
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{\ln^2 x \sin(\pi \ln x)}{x \cos^3(\pi \ln x)} dx \quad (1)$$

Soluzione

La presenza di $\frac{dx}{x}$ suggerisce di porre $t = \ln x$, quindi:

$$\frac{dx}{x} = dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$1 \leq x = e^t \leq e^{1/4},$$

cioè:

$$0 \leq t \leq \frac{1}{4}$$

Quindi:

$$\int_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{\ln^2 x \sin(\pi \ln x)}{x \cos^3(\pi \ln x)} dx = \int_0^{1/4} \frac{t^2 \sin(\pi t)}{\cos^3(\pi t)} dt$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(\pi t)}{\cos^3(\pi t)} dt &= -\frac{1}{\pi} \int \frac{d(\cos \pi t)}{\cos^3(\pi t)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\cos^2(\pi t)} \end{aligned}$$

Eseguiamo perciò un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} \frac{t^2 \sin(\pi t)}{\cos^3(\pi t)} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{1/4} t^2 d \left[\frac{1}{\cos^2(\pi t)} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^2}{\cos^2(\pi t)} \right]_0^{1/4} - 2 \int_0^{1/4} \frac{t dt}{\cos^2(\pi t)} \\ &= \frac{1}{16\pi} - \frac{J}{\pi}, \end{aligned} \quad (2)$$

essendo:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{1/4} \frac{t dt}{\cos^2(\pi t)} = \int_0^{1/4} t d \left[\frac{1}{\pi} \tan(\pi t) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot t \cdot \tan(\pi t) \Big|_0^{1/4} - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/4} \tan(\pi t) dt \\
&= \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{1/4} \frac{d(\cos \pi t)}{\cos \pi t} \\
&= \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{\pi^2} \ln |\cos \pi t|_0^{1/4} \\
&= \frac{1}{4\pi} - \frac{1}{2\pi^2} \ln 2
\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione precedente:

$$\int_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{\ln^2 x \sin(\pi \ln x)}{x \cos^3(\pi \ln x)} dx = \frac{1}{2\pi^3} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + \ln 2 \right)$$