Esercizio 1125
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^e x^{\ln(x/e)} \ln^3 x dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$x^{\ln(x/e)} = x^{\ln x - \ln e} = \frac{x^{\ln x}}{x},$$

per cui:

$$\int_1^e x^{\ln(x/e)} \ln^3 x dx = \int_1^e x^{\ln x} \ln^3 x \frac{dx}{x}$$

La presenza di $\frac{dx}{x}$ suggerisce il cambio di variabile $t = \ln x$, onde:

$$\frac{dx}{x} = dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto a t sono tali che:

$$1 \leq x = e^t \leq e,$$

cioè:

$$0 \leq t \leq 1$$

L'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_1^e x^{\ln(x/e)} \ln^3 x dx &= \int_0^1 t e^{t^2} t^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{t^2} t^2 d\left(t^2\right) \end{aligned}$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $y = t^2$, per cui gli estremi di integrazione rispetto alla nuova variabile sono tali che:

$$0 \leq t = \sqrt{y} \leq 1,$$

cioè:

$$0 \leq y \leq 1$$

Perciò:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 e^{t^2} t^2 d\left(t^2\right) &= \frac{1}{2}\int_0^1 y e^y dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 y d\left(e^y\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[y e^y\Big|_0^1 - \int_0^1 e^y dy \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e - (e-1)\right] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Si conclude:

$$\int_1^e x^{\ln(x/e)} \ln^3 x dx = \frac{1}{2}$$