Esercizio 1124
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + 2\cos x} dx$$

***

Soluzione
Sviluppiamo il quadrato a numeratore della funzione integranda:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + 2\cos x} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{=1} + 2\sin x \cos x}{1 + 2\cos x} dx \\ &= \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 2\cos x}}_{\stackrel{def}{=} I_1} + 2\underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{1 + 2\cos x} dx}_{\stackrel{def}{=} I_2}\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente i due integrali I_1 e I_2. Per il primo poniamo $\tan \frac{x}{2} = t$, per cui:

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

Gli estremi di integrazione rispetto a t sono:

$$0 \leq t \leq 1$$

Perciò:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + 2\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3 - t^2} \\ &= -2\int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 3} = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right)\end{aligned}$$

Per l'integrale I_2 poniamo $t = \cos x$, per cui:

$$\sin x dx = -dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto a t:

$$1 \geq t \geq 0$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \frac{dt}{1+2t} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+2t-1}{1+2t} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+2t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\ln\left|1+2t\right|_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \ln\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + 2\cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) + 1 - \ln\sqrt{3}$$