Esercizio 1123
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare l'integrabilità di $f(x) = \log x$ in $A = [0, 1]$.

***

Soluzione
$x_0 = 0$ è una singolarità poichè $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$, quindi $A - S = (0, 1]$. D'altro canto è $f(x) \leq 0$ in A, per cui la funzione è ivi integrabile. Più precisamente:

$$\int_A f(x)\,dx = -\int_A f_2(x)\,dx$$

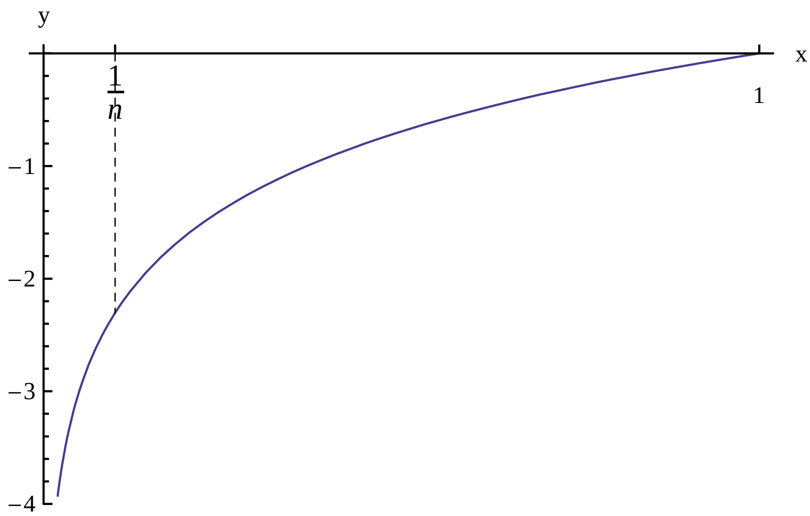
Risulta:

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{D_n} f(x)\,dx$$

Assumiamo come successione di domini limitati e misurabili di continuità per $f(x)$:

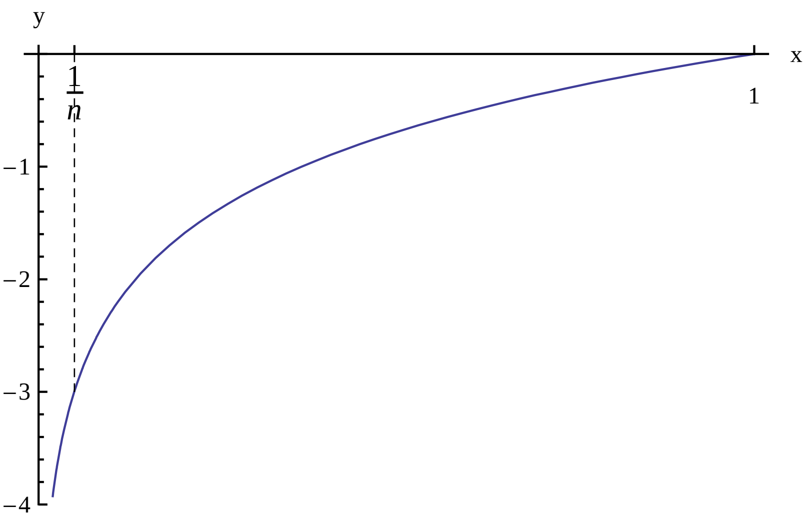
$$D_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \tag{1}$$

Ciò è riportato in fig. ().



Al crescere di n, il dominio (1) si "avvicina" all'intervallo A, come mostrato in fig. ().
Quindi:

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{1/n}^1 \log x dx$$



Risulta:

$$\int_{1/n}^{1} \log x dx = [x \log x]_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} - \int_{1/n}^{1} dx$$
$$= -\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{n}$$

Quindi:

$$\int_{0}^{1} \log x dx = -1 + \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \ln n}{n}$$

Ma:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \ln n}{n} = \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}}_{=0} + \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n}}_{=0} = 0,$$

donde:

$$\int_{0}^{1} \log x dx = -1$$