Esercizio 1121
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\ln 2} e^{\sqrt{1+\sinh x}} \sinh 2x dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Utilizzando la formula di duplicazione del seno iperbolico $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$:

$$\begin{aligned} I \overset{def}{=} \int_0^{\ln 2} e^{\sqrt{1+\sinh x}} \sinh 2x dx &= 2\int_0^{\ln 2} e^{\sqrt{1+\sinh x}} \sinh x \cosh x dx \\ &= 2\int_0^{\ln 2} e^{\sqrt{1+\sinh x}} \sinh x d\left(1+\sinh x\right) \end{aligned}$$

Ciò suggerisce di eseguire il cambio di variabile $t = \sqrt{1+\sinh x}$, per cui gli estremi di integrazione rispetto a t sono tali che:

$$1 \leq t^2 \leq 1 + \sinh\left(\ln 2\right)$$

Ma:

$$\sinh\left(\ln 2\right) = \frac{e^{\ln 2} - \frac{1}{e^{\ln 2}}}{2} = \frac{3}{4}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} &1 \leq t^2 \leq \frac{7}{4} \\ &\Longrightarrow 1 \leq t \leq \frac{\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} I &= 2\int_1^{\sqrt{7}/2} e^t \left(t^2-1\right) d\left(t^2\right) \\ &= 4\int_1^{\sqrt{7}/2} e^t \left(t^3-t\right) dt \end{aligned}$$

A questo punto conviene calcolare prima l'integrale indefinito:

$$F(t) = \int e^t \left(t^3 - t\right) dt,$$

che si potrebbe calcolare per parti. In alternativa, utilizziamo il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\int e^t \left(t^3 - t\right) dt = e^t \left(At^3 + Bt^2 + Ct + D\right)$$

Derivando primo e secondo membro:

$$e^t \left(t^3 - t\right) = e^t \left[At^3 + (3A + B)\,t^2 + (2B + C)\,t + D + C\right]$$

Ciò implica:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 3A + B = 0 \\ 2B + C = -1 \\ D + C = 0 \\ B = -3 \end{cases},$$

la cui soluzione è:

$$A = 1,\ \ B = -3,\ C = 5,\ \ D = -5$$

L'integrale è allora dato da:

$$F(t) = e^t \left(t^3 - 3t^2 + 5t - 5\right)$$

L'integrale proposto:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} e^{\sqrt{1+\sinh x}} \sinh 2x dx &= 4 \int_1^{\sqrt{7}/2} e^t \left(t^3 - t\right) dt \\ &= 4\, F(t)\big|_1^{\sqrt{7}/2} \\ &= 4 \cdot \left[e^{\sqrt{7}/2} \left(\frac{7\sqrt{7}}{8} - \frac{41}{4} + \frac{5}{2}\sqrt{7}\right) + 2e\right] \\ &= 4 \left[2e + \frac{e^{\sqrt{7}/2}}{8} \left(27\sqrt{7} - 82\right)\right] \end{aligned}$$