

Esercizio 1117
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}} \quad (1)$$

Soluzione

Si tratta di un integrale semplice contenente un trinomio di secondo grado, quindi applichiamo il procedimento standard:

$$\begin{aligned} 5-7x-3x^2 &= -3(x+k)^2+l = -3x^2-6kx-3k^2+l \\ \implies \begin{cases} -6k = -7 \\ l-3k^2 = 5 \end{cases} &\implies \begin{cases} k = \frac{7}{6} \\ l = \frac{109}{12} \end{cases} \\ \implies 5-7x-3x^2 &= -3\left(x+\frac{7}{6}\right)^2 + \frac{109}{12} \\ &= \frac{109}{12} \left[1 - \left(\frac{6x+7}{\sqrt{109}}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}} &= 2\sqrt{\frac{3}{109}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{6x+7}{\sqrt{109}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\frac{6x+7}{\sqrt{109}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{6x+7}{\sqrt{109}}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{6x+7}{\sqrt{109}}\right) + C \end{aligned}$$