

Esercizio 1116
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{dS}{\sqrt{2aS + S^2}} \quad (1)$$

Soluzione

Si tratta di un integrale semplice contenente un trinomio di secondo grado, quindi applichiamo il procedimento standard:

$$\begin{aligned} 2aS + S^2 &= (S + k)^2 + l = S^2 + 2kS + k^2 + l \\ \implies \begin{cases} 2k = 2a \\ l + k^2 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} k = a \\ l = -a^2 \end{cases} \\ \implies 2aS + S^2 &= (S + a)^2 - a^2 \\ &= a^2 \left[\left(\frac{S + a}{a} \right)^2 - 1 \right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{dS}{\sqrt{2aS + S^2}} &= \frac{1}{a} \int \frac{dS}{\sqrt{\left(\frac{S+a}{a}\right)^2 - 1}} \\ &= \int \frac{d\left(\frac{S+a}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{S+a}{a}\right)^2 - 1}} \\ &= \ln \left| \frac{S+a}{a} + \sqrt{\left(\frac{S+a}{a}\right)^2 - 1} \right| + C_1 \\ &= \ln \left| S + a + \sqrt{2aS + S^2} \right| + \underbrace{C_1 - \ln a}_{\underline{\underline{C}}} \end{aligned}$$