Esercizio 1114
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{5}} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx \tag{1}$$

***

Soluzione
La presenza del radicale suggerisce il cambio di variabile:

$$\sqrt{e^{2x}-1} = t,$$

per cui:

$$e^{2x} = t^2+1 \Longrightarrow e^{2x}dx = tdt, \ \ x = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) = \ln\sqrt{t^2+1}$$

Gli estremi di integrazione rispetto a t sono tali che:

$$\ln\sqrt{2} \leq x = \ln\sqrt{t^2+1} \leq \ln\sqrt{5},$$

cioè:

$$\begin{gathered}\sqrt{2} \leq \sqrt{t^2+1} \leq \sqrt{5} \\ \Longrightarrow 1 \leq t \leq 5\end{gathered}$$

Quindi:

$$I = \int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{5}} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln\left(t^2+1\right)dt$$

Integriamo per parti:

$$
\begin{aligned}
2I &= \int_1^2 \ln\left(t^2+1\right) dt \\
&= t\ln\left(t^2+1\right)\Big|_1^2 - 2\int_1^2 \frac{t^2 dt}{t^2+1} \\
&= 2\ln 5 - \ln 2 - 2\int_1^2 \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt \\
&= 2\ln 5 - \ln 2 - 2\left(\int_1^2 dt - \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2}\right) \\
&= 2\ln 5 - \ln 2 - 2\left(t\big|_1^2 - \arctan t\big|_1^2\right) \\
&= 2\ln 5 - \ln 2 - 2\left(1 - \arctan 2 + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{5}} \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \ln\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} - 1 + \arctan 2
$$