Esercizio 1109
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\frac{1-\cos x^2}{1+\cos x^2}dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = x^2$, per cui

$$xdx = \frac{dt}{2}$$

Gli estremi di integrazione rispetto a t sono

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Quindi:

$$I \stackrel{def}{=} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\frac{1-\cos x^2}{1+\cos x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{1+\cos t}dt$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $\tan \frac{t}{2} = y$, per cui:

$$\cos t = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad dt = \frac{2dy}{1+y^2}$$

Gli estremi di integrazione rispetto a y sono:

$$0 \leq y \leq 1$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2}dy = \int_0^1 \frac{1+y^2-1}{1+y^2}dy \\ &= \int_0^1 dy - \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \\ &= y|_0^1 - \arctan y|_0^1 \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$