Esercizio 1105
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}}dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Osserviamo che $x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(x+2\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2$, quindi:

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}}dx=\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}dx$$

Ma

$$d\left(\sqrt{x}+1\right)=\frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

per cui:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}dx &= 2\int_1^4 \frac{\ln x}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}d\left(\sqrt{x}+1\right)\\ &= 2\int_1^4 \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}d\left(\sqrt{x}+1\right)\end{aligned}$$

Ciò suggerisce il cambio di variabile definito dalla relazione:

$$t=\sqrt{x}+1,$$

da cui.

$$\begin{aligned}e^x &= t^2+1\\ e^x dx &= 2tdt\end{aligned}$$

L'integrando diventa:

$$\ln\left(\sqrt{x}\right)^2=2\ln|t-1|$$

Gli estremi di integrazione rispetto a t sono tali che:

$$1\leq x=t^2-1\leq 4,$$

cioè:

$$2 \leq t \leq 4$$

Quindi l'integrale:

$$2\int_{1}^{4} \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} d\left(\sqrt{x}+1\right) = 4\int_{2}^{3} \frac{\ln|t-1|}{t^2} dt$$

Abbiamo $t \in [2,3] \Longrightarrow |t-1| = t-1$, donde:

$$4\int_{2}^{3} \frac{\ln|t-1|}{t^2} dt = 4\int_{2}^{3} \frac{\ln(t-1)}{t^2} dt$$

Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} 4\int_{2}^{3} \frac{\ln(t-1)}{t^2} dt &= 4\int_{2}^{3} \ln(t-1)\, d\left(-\frac{1}{t^2}\right) \\ &= 4\left[-\frac{1}{t}\ln(t-1)\Big|_2^3 + \int_{2}^{3} \frac{dt}{t(t-1)}\right] \\ &= -\frac{4}{3}\ln 2 + 4J, \end{aligned}$$

essendo:

$$J = \int_{2}^{3} \frac{dt}{t(t-1)},$$

che si calcola per riduzioni in frazioni semplici. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(t-1)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{At - A + Bt}{t(t-1)} \\ &= \frac{(A+B)t - A}{t(t-1)}, \end{aligned}$$

cioè:

$$1 = (A+B)t - A$$

Quindi il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=-1 \end{cases},$$

da cui $A=-1$, $B=1$:

$$
\begin{aligned}
J &= \int_2^3 \left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right) = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right|_2^3 \\
&= \ln\frac{2}{3}+\ln 2 = \ln\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
4\int_2^3 \frac{\ln(t-1)}{t^2}dt &= -\frac{4}{3}\ln 2 + 4\ln\frac{4}{3} \\
&= -\frac{4}{3}\ln 2 + 4\ln 4 - 4\ln 3 \\
&= -\frac{4}{3}\ln 2 + 8\ln 2 - 4\ln 3 \\
&= 4\left(\frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3\right)
\end{aligned}
$$