Esercizio 1103
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{1/8} \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x^2}} \tag{1}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $x = \sin^3 t$, per cui:

$$dx = 3\sin^2 t \cos t dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$0 \le x = \sin^3 t \le \frac{1}{8},$$

cioè:

$$0 \le \sin t \le \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow 0 \le t \le \frac{\pi}{6}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int_0^{1/8} \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x^2}} &= 3\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt \\ &= 3\int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos^2 t}{\cos t} dt \\ &= 3\left(\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos t} - \int_0^{\pi/6} \cos t dt\right)\end{aligned}$$

$\int \frac{dt}{\cos t}$ è un integrale noto, precisamente $\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$, onde:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos t} &= \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|_{t=0}^{t=\pi/6} \\ &= \ln\left|\tan\frac{\pi}{3}\right| \\ &= \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3\end{aligned}$$

Il secondo integrale

$$\int_0^{\pi/6} \cos t dt = \sin t|_0^{\pi/6} = \frac{1}{2}$$

Perciò:

$$\int_0^{1/8} \frac{dx}{1 - \sqrt[3]{x^2}} = \frac{3}{2} (\ln 3 - 1)$$