Esercizio 1102
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^{1/8} \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}} \tag{1}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $x = \sin^3 t$, per cui:

$$dx = 3\sin^2 t \cos t dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$0 \leq x = \sin^3 t \leq \frac{1}{8},$$

cioè:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sin t \leq \frac{1}{2} \\ \Longrightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

L'integrale diventa:

$$\int_0^{1/8} \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}} = 3\int_0^{\pi/6} \sin^2 t dt$$

$\int \sin^2 t dt$ è un integrale noto, precisamente $\int \sin^2 t dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t + C$, onde:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/8} \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}} &= 3\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{t=0}^{t=\pi/6} \\ &= 3\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{8}\sqrt{3} \end{aligned}$$