Esercizio 1098
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[-a, a]$. Si dimostri la seguente proprietà dell'integrale definito di f:

$$\int_{-a}^{a} f\left(x^2\right) dx = 2\int_{0}^{a} f\left(x^2\right) dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Procediamo per decomposizione:

$$\int_{-a}^{a} f\left(x^2\right) dx = \int_{-a}^{0} f\left(x^2\right) dx + \int_{0}^{a} f\left(x^2\right) dx \tag{2}$$

Nel primo integrale a secondo membro, eseguiamo il cambio di variabile $x = -t$, per cui

$$dx = -dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$-a \leq x = -t \leq 0,$$

cioè:

$$a \geq t \geq 0$$

Quindi:

$$\int_{-a}^{0} f\left(x^2\right) dx = -\int_{a}^{0} f\left(t^2\right) dt = \int_{0}^{a} f\left(t^2\right) dt = \int_{0}^{a} f\left(x^2\right) dx$$

Sostituendo nella (2), otteniamo il risultato.