

Esercizio 1094
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Determinare l'area della figura piana racchiusa tra i seguenti luoghi geometrici: $y = x^3$, $y = x$, $y = 2x$.

Soluzione

Siccome la figura assegnata è simmetrica rispetto all'asse y , si ha che la sua area S è tale che:

$$\frac{S}{2} = S_1 + S_2, \quad (1)$$

essendo

$$S_1 = \text{mis } \mathcal{R}_1, S_2 = \text{mis } \mathcal{R}_2$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\} \\ \mathcal{R}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq \sqrt{2}, x^3 \leq y \leq 2x\} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 (2x - x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ S_2 &= \int_1^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}} x dx - \int_1^{\sqrt{2}} x^3 dx \\ &= x^2 \Big|_1^{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Sostituendo i valori di S_1 e di S_2 nella (1):

$$S = \frac{3}{2}$$