

Esercizio 1093
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}},$$

eseguendo la sostituzione $x = \frac{1}{t}$.

Soluzione

Differenziando $x = \frac{1}{t}$

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

Vediamo come si trasforma l'integrando:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} &= -\frac{dt}{t^2} \cdot \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= -\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla nuova variabile sono tali che:

$$\frac{3}{4} \leq x = \frac{1}{t} \leq \frac{4}{3},$$

cioè:

$$\frac{4}{3} \geq t \geq \frac{3}{4}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} &= -\int_{4/3}^{3/4} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \int_{3/4}^{4/3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right|_{3/4}^{4/3} \\ &= \ln \frac{9}{3} - \ln 2 \\ &= \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$