

Esercizio 1075
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare l'area della superficie limitata dalle due parabole

$$\gamma_1) y = 4 - \frac{2}{3}x^2$$

$$\gamma_2) y = \frac{x^2}{3}$$

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto le coordinate cartesiane dei punti di intersezione delle parabole assegnate. Si tratta di risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} y = 4 - \frac{2}{3}x^2 \\ y = \frac{x^2}{3} \end{cases},$$

cioè:

$$4 - x^2 = 0 \iff x = \pm 2$$

Quindi abbiamo i punti: $(-2, 0)$ e $(2, 0)$. Ora poniamo:

$$f_1(x) = 4 - \frac{2}{3}x^2, f_2(x) = \frac{x^2}{3}$$

È facile convincersi che:

$$\forall x \in (-2, 2), f_1(x) \geq f_2(x),$$

per cui l'area del segmento di parabola è

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 [f_1(x) - f_2(x)] dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx \\ &= 4x \Big|_{-2}^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-2}^2 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$