**Esercizio 1061**
**(File scaricato da http://www.extrabyte.info)**

Assegnato l'integrale della funzione di Gauss $e^{-x^2}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \tag{1}$$

dimostrare che soddisfa la seguente identità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

**Soluzione**
L'integrale (1) può essere scritto come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{2}$$

Nel primo integrale a secondo membro operiamo la seguente sostituzione:

$$x = -x',$$

onde:

$$\begin{aligned} dx &= -dx' \\ e^{-x^2} &= e^{-x'^2}, \end{aligned}$$

giacché la funzione di Gauss è manifestamente pari.
Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione $x'$ sono tali che:

$$-\infty < x = -x' \leq 0,$$

cioè:

$$+\infty > x' \geq 0$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = -\int_{+\infty}^{0} e^{-x'^2} dx' = \int_{0}^{+\infty} e^{-x'^2} dx' = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{3}$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $x'$ è una variabile muta.
Sostituendo il risultato (3) nella (2):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{4}$$

Ora nell'integrale a secondo membro della (4) operiamo la sostituzione $x = \sqrt{t}$, per cui:

$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$
$$e^{-x^2} = e^{-t}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile di integrazione $t$ sono tali che:

$$0 < x = \sqrt{t} < +\infty,$$

cioè:

$$0 < t < +\infty,$$

onde:

$$2 \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Si conclude che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$