Esercizio 1060
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale definito con la sostituzione a fianco indicata:

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx, \quad e^x - 1 = t^2 \tag{1}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} e^x - 1 = t^2 &\Longrightarrow e^x dx = 2tdt \\ &\Longrightarrow dx = \frac{2t}{e^x}dt = \frac{2tdt}{t^2+1} \end{aligned}$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$0 \leq x = \ln\left(1 + t^2\right) \leq \ln 2$$

Cioè:

$$1 \leq 1 + t^2 \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq t \leq 1$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx &= 2\int_0^1 \frac{t^2 dt}{t^2+1} \\ &= 2\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+1}dt \\ &= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= 2\left(1 - \arctan t|_0^1\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$