

Esercizio 1058
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale definito con la sostituzione a fianco indicata:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}, \quad x = t^2 \tag{1}$$

Soluzione

Abbiamo:

$$x = t^2 \implies dx = 2t dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla variabile t sono tali che:

$$0 \leq x = t^2 \leq 4$$

Cioè:

$$0 \leq t \leq 2$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &= 2 \int_0^2 \frac{t dt}{1 + t} = 2 \int_0^2 \frac{t + 1 - 1}{t + 1} dt \\ &= 2 \left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{1 + t} \right) \\ &= 2 \int_0^2 dt - 2 \int_0^2 \frac{dt}{1 + t} \\ &= 4 - 2 [\ln |1 + t|]_0^2 \\ &= 4 - 2 \ln 3 \end{aligned}$$