

Esercizio 1057
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Sia f è una qualunque funzione continua in $[-a, a]$. Dimostrare che se f è pari:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (1)$$

Se invece f è dispari:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (2)$$

Soluzione

In entrambi i casi possiamo scrivere:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (3)$$

Nel primo integrale a secondo membro eseguiamo la sostituzione:

$$x = -x' \implies dx = -dx' \quad (4)$$

I nuovi estremi di integrazione sono tali che:

$$-a \leq x = -x' \leq 0,$$

cioè:

$$a \geq x' \geq 0$$

Quindi

$$\int_{-a}^0 f(x) dx \stackrel{f(x)=f(-x)}{=} - \int_a^0 f(x') dx' = \int_0^a f(x') dx' = \int_0^a f(x) dx \quad (5)$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che x' è una variabile muta. Sostituendo la (5) nella (3), otteniamo la (1).

Se f è dispari, il cambio di variabile (4) implica;

$$\int_{-a}^0 f(x) dx \stackrel{f(x)=-f(-x)}{=} \int_a^0 f(x') dx' = - \int_0^a f(x') dx' = - \int_0^a f(x) dx \quad (6)$$

Sostituendo la (6) nella (3), otteniamo la (2).