Esercizio 1056
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Se f è una qualunque funzione continua in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, determinare la trasformazione dell'integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx,$$

in seguito alla sostituzione $x = \arctan x$
Soluzione
Abbiamo:

$$x = \sinh t \Longrightarrow dx = \cosh t dt$$
$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = dt$$

Gli estremi di integrazione rispetto alla nuova variabile t

$$\frac{3}{4} \leq x = \sinh t \leq \frac{4}{3}$$

Cioè:

$$\sinh t \geq \frac{3}{4} \Longleftrightarrow t \geq \text{arcsinh}\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left|\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16}+1}\right| = \ln 2$$
$$\sinh t \leq \frac{4}{3} \Longleftrightarrow t \geq \text{arcsinh}\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left|\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16}+1}\right| = \ln 3,$$

giacchè:

$$\text{arcsinh} x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$$

Quindi:

$$\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} dt = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$