Esercizio 1053
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Trasformare e calcolare l'integrale definito, con la sostituzione indicata a fianco:

$$\int_1^3 \sqrt{x+a}dx, \quad \text{con } x = 2t - a, \tag{1}$$

essendo $a > 0$.

Soluzione

Abbiamo:

$$x = 2t - a \Longrightarrow dx = 2dt,$$

mentre gli estremi di integrazione cambiano in:

$$1 \le x = 2t - a \le 3$$

Cioè:

$$\begin{aligned} 1 + a \le 2t \le 3 + a \\ \Longrightarrow \frac{1+a}{2} \le t \le \frac{3+a}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{x+a}dx &= 2\int_{\frac{1+a}{2}}^{\frac{3+a}{2}} \sqrt{2t}dt = 2\sqrt{2}\int_{\frac{1+a}{2}}^{\frac{3+a}{2}} \sqrt{t}dt \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}\left[t\right]_{\frac{1+a}{2}}^{\frac{3+a}{2}} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2}\left[\frac{(3+a)^{3/2}}{2^{3/2}} - \frac{(1+a)^{3/2}}{2^{3/2}}\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[(3+a)\sqrt{3+a} - (1+a)\sqrt{1+a}\right] \end{aligned}$$