Esercizio 1048
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Si calcoli il seguente integrale definito:

$$F(\xi) = \int_0^\xi x^2 \sqrt{\xi^2 - x^2} dx, \quad \text{con } \xi > 0, \tag{1}$$

eseguendo il cambio di variabile $x = \xi \sin t$.

Soluzione
Abbiamo

$$dx = \xi \cos t dt$$

Determiniamo i nuovi estremi di integrazione:

$$0 \leq x = \xi \sin t \leq \xi,$$

cioè:

$$0 \leq \sin t \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

cosicchè l'integrale diviene:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \xi^4 \int_0^\xi \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{\xi^4}{4} \int_0^\xi \sin^2 2t dt \\ &= \frac{\xi^4}{8} \int_0^\xi \sin^2 2t d(2t) \\ &= \frac{\xi^4}{8} \left[t - \frac{1}{2} \sin 4t \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi \xi^4}{16} \end{aligned}$$