Esercizio 1041
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnata la funzione:

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt, \tag{1}$$

essendo $\alpha, \beta \in C^1(X)$, con $X \subseteq \mathbb{R}$. Si calcoli la derivata di $F(x)$.

Soluzione
Sia $G(t)$ una primitiva di $F(x)$:

$$G(t) = \int f(t)\,dt$$

Quindi:

$$G'(t) = f(t)$$

La funzione $F(x)$ si esprime attraverso la primitiva $G(x)$:

$$F(x) = G(x)\big|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = G[\beta(x)] - G[\alpha(x)]$$

Derivando ambo i membri:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}G[\beta(x)] - \frac{d}{dx}G[\alpha(x)]$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$F'(x) = \beta'(x)\,G'[\beta(x)] - \alpha'(x)\,G'[\alpha(x)] \tag{2}$$

Ad esempio:

$$F(x) = \int_{x}^{x^2} e^{-t^2}\,dt$$

Qui poniamo:

$$G'(t) = e^{-t^2}$$

Per la (2):

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2xG'\left(x^2\right) - G\left(x^2\right) \\ &= 2xe^{-x^4} - e^{-x^2} \end{aligned} \tag{3}$$