Esercizio 1038
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x \arctan \sqrt{x^2-1} dx \tag{1}$$

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = x^2 - 1$, per cui

$$xdx = \frac{1}{2}dt,$$

e l'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \frac{1}{2}\int \arctan \sqrt{t} dt,$$

che può essere calcolato per parti:

$$F(t) = \frac{1}{2}t \arctan \sqrt{t} - \frac{1}{2}\int td\left(\arctan \sqrt{t}\right)$$

Osserviamo che:

$$\frac{d}{dt}\arctan \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$$

Quindi:

$$F(t) = \frac{1}{2}t \arctan \sqrt{t} - \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$$

Per calcolare $\int \frac{\sqrt{t}}{1+t}dt$ eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $t = y^2$, quindi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{t}}{1+t}dt &= 2\int \frac{y^2}{1+y^2}dy \\
&= 2\int \frac{1+y^2-1}{1+y^2}dy \\
&= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy \\
&= 2(y - \arctan y) + C_1 \\
&= 2\left(\sqrt{t} - \arctan \sqrt{t}\right) + C_1
\end{aligned}$$

Perciò:

$$F(t) = \frac{1}{2}t \arctan \sqrt{t} - \frac{1}{2}\sqrt{t} + \frac{1}{2}\arctan \sqrt{t} + C$$

Ripristinando

$$\int x \arctan \sqrt{x^2-1}dx = \frac{x^2}{2} \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$$