Esercizio 1037
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Si chiede di calcolare i seguenti integrali considerandoli come il limite delle corrispondenti somme integrali.

$$1)\ \int_0^b x^2 dx \quad 2)\ \int_a^b dx \qquad 3)\ \int_0^T (v_0 + gt)\, dt, \text{ con } v_0, g = \text{const}$$

$$4)\ \int_{-2}^1 x^2 dx \quad 5)\ \int_0^{10} 2^x dx \quad 6)\ f(x) = \int_0^x \sin t dt$$

Soluzioni

1. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[0, b]$:

$$x_k = k\frac{b}{n}, \quad k \in \mathcal{N} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

L'ampiezza è

$$\delta_n = \frac{b}{n}$$

La somma integrale:

$$\sigma_{D_n} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Prendiamo $\xi_k = x_k$:

$$\sigma_{D_n} = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

Ma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(2n-1)(n-1)}{6},$$

donde:

$$\sigma_{D_n} = \frac{b^3}{6}\frac{(2n-1)(n-1)}{n^2},$$

da cui l'integrale:

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{D_n} = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} = \frac{b^3}{3}$$

2. Eseguiamo un'equipartizione D_n di $[a,b]$:

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k \in \mathcal{N} = \{0,1,2,...,n-1\}$$

L'ampiezza di D_n è:

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}$$

La somma integrale è:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \\ &= b - a,\end{aligned}$$

giacchè

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) = n$$

Quindi:

$$\int_a^b dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{\delta_n} = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n = b - a$$

3. Quest'integrale ha una semplice interpretazione fisica, se poniamo:

$$y(T) = \int_0^T (v_0 + gt)\, dt$$

Qui $y(T)$ è al tempo T la quota di un punto materiale in caduta libera in un campo gravitazionale (g è l'accelerazione di gravità) con velocità iniziale v_0. L'asse y è orientato verso il basso e si trascura la resistenza dell'aria. L'integrando è la velocità istantanea:

$$v(t) = v_0 + gt$$

Eseguiamo un'equipartizione D_n di $[0,T]$:

$$t_k = k\frac{T}{n}, \quad \text{con} \quad k \in \mathcal{N} = \{0,1,2,...,n-1\}$$

L'ampiezza è

$$\delta_n = \max_{k \in \mathcal{N}} (t_{k+1} - t_k) = \frac{T}{n}$$

La somma integrale è

$$\sigma_{D_n} = \sum_{k=0}^{n-1} v\left(\tau_k\right)\left(t_{k+1} - t_k\right)$$

Assumendo $\tau_k = t_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(v_0 + g\frac{T}{n}k\right) \\ &= Tv_0 + \frac{n+1}{n}\frac{gT^2}{2}\end{aligned}$$

Quindi l'integrale:

$$\begin{aligned}y\left(T\right) &= \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{D_n} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} \\ &= v_0 T + \frac{1}{2} g T^2\end{aligned}$$

4. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[-2, 1]$:

$$x_k = -2 + \frac{3}{n}k, \quad \text{con } k = 0, 1, ..., n-1$$

di ampiezza:

$$\delta_n = \frac{3}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \\ &= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{n}k - 2\right)^2 \\ &= \frac{3}{2}\frac{2n^2 - 3n + 3}{n}\end{aligned}$$

da cui:

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} = 3$$

5. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[0, 10]$:

$$x_k = \frac{10}{n}k, \quad \text{con } k = 0, 1, ..., n-1$$

di ampiezza:

$$\delta_n = \frac{10}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{10}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k\frac{10}{n}} \\ &= \frac{52^{\frac{10+n}{n}}\left(-1+(1024)^{1/n}\right)^n}{\left(-1+1024^{1/n}\right)^n}\end{aligned}$$

da cui:

$$\int_0^{10} 2^x dx = \lim_{n\to+\infty}\sigma_{D_n} = \frac{10230}{\ln(1024)}$$

6. Eseguiamo l'equipartizione:

$$t_k = k\frac{x}{n}, \text{ con } k \in \mathcal{N} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

L'ampiezza dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ è:

$$\delta_{k,n} = t_{k+1} - t_k = \frac{x}{n},$$

donde l'ampiezza della partizione:

$$\delta_n = \max_{k\in\mathcal{N}}(\delta_k) = \frac{x}{n}$$

Assumendo $\tau_k = t_{k+1}$ e ponendo $g(t) = \sin t$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} g(t_{k+1})\frac{x}{n} \\ &= \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k\frac{x}{n}\right)\end{aligned}$$

Per il calcolo della sommatoria utilizziamo una nota relazione trigonometrica:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(ky) = \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)},$$

donde:

$$\sigma_{D_n} = \frac{x\left\{\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right]\right\}}{2n\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$$

Passiamo al limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{D_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x\left\{\cos\left(\frac{x}{2n}\right) - \cos\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)x\right]\right\}}{2n\sin\left(\frac{x}{2n}\right)}$$
$$= \frac{x\left(1-\cos x\right)}{2\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{2n}\right)}$$

Calcoliamo a parte il limite a denominatore:

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{2n}\right) \underset{m=n^{-1}}{=} \lim_{m\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{mx}{2}\right)}{m} = \frac{x}{2},$$

Quindi

$$f\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{D_n} = 1 - \cos x$$