Esercizio 1022
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Una grandezza[1] q cresce in funzione del tempo con una velocità proporzionale alla grandezza medesima. All'istante $t = 0$ è $q(0) = q_0$, mentre all'istante $t_1 > 0$ è $q(t_1) = q_1$. Si determini q a tutti i tempi.

***

Soluzione
Asserire che q cresce in funzione del tempo con una velocità proporzionale alla grandezza medesima, significa che:

$$\frac{dq}{dt} = kq, \tag{1}$$

essendo $k > 0$ una costante. Infatti la velocità di crescita di $q(t)$ altro non è che la sua derivata prima.
La (1) è un'equazione differenziale che si integra per separazione di variabili:

$$\frac{dq}{q} = kdt$$

Integrando ambo i membri:

$$\int \frac{dq}{q} = k \int dt \Longrightarrow \ln q = kt + C$$

Passando dai logaritmi ai numeri:

$$q(t) = e^C e^{kt}$$

La condizione iniziale è:

$$q(0) = e^C = q_0$$

Quindi:

$$q(t) = q_0 e^{kt}$$

Per conoscere la costante k, sfruttiamo l'altro dato del problema, cioè $q(t_1 > 0) = q_1$:

$$q_1 = q_0 e^{kt} \Longrightarrow k = \frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{q_1}{q_0}\right)$$

Perciò, l'espressione di $q(t)$ a tutti i tempi:

$$q(t) = q_0 \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{t/t_1}$$

[1] Potrebbe rappresentare il numero di unità di una popolazione batterica.