**Esercizio 1010**
**(File scaricato da http://www.extrabyte.info)**

Risolvere la disequazione:

$$\frac{e^{3x}-e^{x}}{e^{x}-1}>0 \tag{1}$$

***

**Soluzione**
Poniamo $t=e^{x}$, per cui:

$$\frac{t^{3}-t}{t-1}>0 \Longleftrightarrow \frac{t\left(t^{2}-1\right)}{t-1}>0$$

Il segno del numeratore è il segno del prodotto $t\left(t^{2}-1\right)$

$$t\left(t^{2}-1\right)>0 \Longleftrightarrow t\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$$

Da ciò segue il segno del rapporto $\frac{t\left(t^{2}-1\right)}{t-1}$

$$\frac{t\left(t^{2}-1\right)}{t-1}>0 \Longleftrightarrow t\in(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$$

Cioè:

$$\begin{aligned} t<-1 &\Longleftrightarrow e^{x}<-1 \quad \text{mai!} \\ 0<t<1 &\Longleftrightarrow e^{x}<1 \Longleftrightarrow x<0 \\ t>1 &\Longleftrightarrow e^{x}>1 \Longleftrightarrow x>0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{e^{3x}-e^{x}}{e^{x}-1}>0 \Longleftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

In realtà $x=0$ è soluzione. Infatti tale punto è di discontinuità eliminabile per $\frac{e^{3x}-e^{x}}{e^{x}-1}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{x}}{e^{x}-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{x}-1}=\lim_{x\to 0}e^{x}\left(e^{x}+1\right)=2$$