

## Esercizi su estremi vincolati e assoluti

**Esercizio 1.** Determinare i punti di minimo e di massimo (e i relativi valori di minimo e massimo) assoluto di

$$f(x, y) = x^2 - \cos(\pi y)$$

sul quadrato

$$Q = [0, 1] \times [0, 1].$$

---

**Svolgimento.** Ricorro i punti di estremo assoluto nel quadrato aperto  $(0, 1) \times (0, 1)$  fra i punti di annullamento del gradiente di  $f$ . Le soluzioni in  $Q$  del sistema

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ \pi \sin(\pi y) = 0 \end{cases}$$

sono i punti  $O = (0, 0)$  e  $P = (0, 1)$ , che non appartengono a  $(0, 1) \times (0, 1)$ . Quindi  $f$  non ha punti stazionari (e quindi neppure di estremo) nell'interno di  $Q$ .

I punti di estremo relativo andranno cercati fra i punti sul bordo  $\partial Q$  del quadrato, dato dall'unione dei quattro segmenti:

$$\partial Q = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, D] \cup [D, A]$$

con  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (1, 1)$  e  $D = (0, 1)$ . Ora osserviamo che

- il segmento  $[A, B]$  è parametrizzato da  $0 \leq x \leq 1$  e  $y = 0$ , quindi la restrizione di  $f$  ad  $[A, B]$  è

$$f(x, 0) = x^2 - 1 \quad \text{for } x \in [0, 1].$$

Essendo tale funzione strettamente crescente su  $[0, 1]$ , concludiamo che essa ha un punto di minimo assoluto per  $x = 0$  (da cui il punto  $(0, 0)$ ) e un punto di massimo assoluto per  $x = 1$  (da cui il punto  $(1, 0)$ ).

- Il segmento  $[B, C]$  è parametrizzato da  $0 \leq y \leq 1$  e  $x = 1$ , quindi la restrizione di  $f$  ad  $[A, B]$  è

$$f(1, y) = 1 - \cos(\pi y) \quad \text{for } y \in [0, 1].$$

Essendo tale funzione strettamente crescente su  $[0, 1]$ , concludiamo che essa ha un punto di minimo assoluto per  $y = 0$  (da cui il punto  $(1, 0)$ ) e un punto di massimo assoluto per  $y = 1$  (da cui il punto  $(1, 1)$ ).

- Il segmento  $[C, D]$  è parametrizzato da  $0 \leq x \leq 1$  e  $y = 1$ , quindi la restrizione di  $f$  ad  $[A, B]$  è

$$f(x, 1) = x^2 + 1 \quad \text{for } x \in [0, 1].$$

Essendo tale funzione strettamente crescente su  $[0, 1]$ , concludiamo che essa ha un punto di minimo assoluto per  $x = 0$  (da cui il punto  $(0, 1)$ ) e un punto di massimo assoluto per  $x = 1$  (da cui il punto  $(1, 1)$ ).

- Il segmento  $[D, A]$  è parametrizzato da  $0 \leq y \leq 1$  e  $x = 0$ , quindi la restrizione di  $f$  ad  $[D, A]$  è

$$f(0, y) = -\cos(\pi y) \quad \text{for } y \in [0, 1].$$

Essendo tale funzione strettamente crescente su  $[0, 1]$ , concludiamo che essa ha un punto di minimo assoluto per  $y = 0$  (da cui il punto  $(0, 0)$ ) e un punto di massimo assoluto per  $y = 1$  (da cui il punto  $(0, 1)$ ).

Confrontando i valori assunti da  $f$  nei punti  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (1, 1)$  e  $D = (0, 1)$ , concludiamo che

$A = (0, 0)$  è il punto di minimo assoluto di  $f$ , con  $f(0, 0) = -1$ ,

$B = (1, 1)$  è il punto di massimo assoluto di  $f$ , con  $f(1, 1) = 2$ .

**Osservazione:** se nel testo dell'esercizio fossero solo stati richiesti i valori di minimo e massimo assoluto, sarebbe stato sufficiente osservare che

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - \cos(\pi y) \leq x^2 - (-1) \leq 1 + 1 = f(1, 1) \quad \forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ f(x, y) &= x^2 - \cos(\pi y) \geq -\cos(\pi y) \geq -1 = f(0, 0) \quad \forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]. \end{aligned}$$

**Esercizio 2.** Determinare i punti di massimo e minimo assoluto di

$$f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy$$

sul triangolo

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0, x - y \geq -1\}.$$

**Svolgimento.** Ricercare i punti di estremo libero nell'interno di  $T$  (cioè nell'insieme  $T \setminus \partial T$ ), determinando i punti di annullamento di  $\nabla f(x, y) = (2xy - y^2 + y, x^2 - 2xy + x)$

$$\begin{cases} y(2x - y + 1) = 0 \\ x(x - 2y + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ o } 2x - y + 1 = 0 \\ x = 0 \text{ o } x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti stazionari  $O = (0, 0)$ ,  $P_1 = (0, 1)$ ,  $P_2 = (-1, 0)$  e  $P_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Si noti che  $P_3$  è l'unico punto stazionario in  $T \setminus \partial T$ . Lo classifichiamo calcolando la matrice hessiana

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x - 2y + 1 \\ 2x - 2y + 1 & -2x \end{bmatrix},$$

e quindi

$$H\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

il cui determinante è strettamente positivo. Ne concludiamo che  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  è un punto di minimo relativo interno a  $T$ .

Ricercare i punti di estremo relativo di  $f(x, y)$  sul vincolo

$$\partial T = L_1 \cup L_2 \cup L_3,$$

con

$$L_1 = [-1, 0] \times \{0\}, \quad L_2 = \{0\} \times [0, 1], \quad L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1, x \in [-1, 0]\}.$$

Osserviamo che

$$f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial T$$

e che

$$f(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \in T \setminus \partial T$$

Ne concludiamo che tutti i punti di  $\partial T$  sono di massimo assoluto per  $f$ , e che il valore di massimo assoluto per  $f$  su  $T$  è 0. Il punto  $P_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  è di minimo assoluto per  $f$ , e il valore di minimo assoluto è  $f(P_3) = -\frac{1}{27}$ .

**Osservazione.** Si noti che negli Esercizi 1 e 2 non sarebbe possibile risolvere il problema degli estremi vincolati

- né con il metodo delle curve di livello, in quanto non sarebbe facile capire il luogo geometrico rappresentato dalle curve di livello  $x^2 - \cos(\pi y) = k$  e  $x^2y - xy^2 + xy = k$ ,
- né con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, in quanto in entrambi i casi non esiste alcuna funzione  $g$  di classe  $C^1$  tramite la quale si possa rappresentare il vincolo.

**Esercizio 3.** Determinare i punti di minimo e massimo assoluto di

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2$$

nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

**Svolgimento.** Si noti che  $D$  è il disco di centro  $(0, 0)$  e raggio 2. Uso il metodo delle curve di livello, cioè le curve

$$x^2 + y^2 - 2x + 2 = k \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 + y^2 = k - 1$$

al variare di  $k \geq 1$  (per  $k < 1$  il luogo geometrico summenzionato è dato dall'insieme vuoto). Si noti che  $(x - 1)^2 + y^2 = k - 1$  è la circonferenza di centro  $(1, 0)$  e raggio  $r = \sqrt{k - 1}$ . Ricerco

- il minimo valore  $k_{\min}$  tale che la circonferenza  $(x - 1)^2 + y^2 = k_{\min} - 1$  intersechi  $D$  e il massimo valore  $k_{\max}$  tale che la circonferenza  $(x - 1)^2 + y^2 = k_{\max} - 1$  intersechi  $D$

Chiaramente,  $k_{\min}$  e  $k_{\max}$  saranno, rispettivamente, il minimo e il massimo valore assunti da  $f$  in  $D$ . Si ha che

- $k_{\min} = 1$ , in corrispondenza alla circonferenza degenera di centro  $(1, 0)$  e raggio 0. Tale circonferenza si riduce ovviamente al solo punto  $(1, 0)$ . Quindi 1 è il valore di minimo assoluto, e  $(1, 0)$  il punto di minimo assoluto.
- Si trova  $k_{\max}$  ricercando il massimo valore di  $k$  per il quale il sistema

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = k_{\max} - 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

ha una soluzione  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Mettendo a sistema le due equazioni, si trova

$$4 - 2\bar{x} + 2 = k,$$

da cui

$$k_{\max} = \max_{\bar{x} \in [-2, 2]} (4 - 2\bar{x} + 2) = 4 - 2(-2) + 2 = 10$$

Quindi il valore di massimo assoluto è  $k_{\max} = 10$ , assunto nel punto le cui coordinate si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2 = 10 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

da cui si ottiene il punto di massimo assoluto  $(-2, 0)$ .

**Esercizio assegnato.** Ritrovare lo stesso risultato nel seguente modo:

1. ricerco i punti di estremo liberi in  $D \setminus \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$  fra i punti stazionari di  $f$ . Trovo che  $(1, 0)$  è l'unico punto stazionario di  $f$  in  $D \setminus \partial D$ . Lo classifico con il test della matrice hessiana.
2. Studio i punti di estremo relativo per  $f$  vincolati alla circonferenza  $x^2 + y^2 = 4$  con i seguenti metodi (**provare a sviluppare tutti e tre i metodi!!**):
  - (a) moltiplicatori di Lagrange: la Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2x + 2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

si noti che in questo modo si troveranno i due punti  $(2, 0)$ ,  $(-2, 0)$  che poi si dovrà confrontare

- (b) esplicitando nel vincolo  $y$  in funzione di  $x$ : conviene esplicitare  $y^2$  in funzione di  $x$  perché  $y$  appare nell'espressione di  $f$  solo come  $y^2$

$$y^2 = 4 - x^2, \quad x \in [-2, 2]$$

e quindi mi riduco a studiare la funzione

$$h(x) = f(x, y(x)) = 4 - 2x + 2, \quad x \in [-2, 2]$$

- (c) usando l'equazione parametrica di  $x^2 + y^2 = 4$ ...

**Esercizio 4.** Al variare di  $\beta \in [0, +\infty)$ , determinare i punti di estremo assoluto di

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$$

nel dominio  $R_\beta = [0, 2] \times [0, 7\beta]$ .

**Svolgimento.** Esaminiamo dapprima il caso  $\beta = 0$ .  $R_0$  degenera nel segmento  $[0, 2] \times \{0\}$  sull'asse  $x$ . Allora è sufficiente studiare i punti di estremo della funzione

$$h(x) = f(x, 0) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \quad \forall x \in [0, 2].$$

Si vede immediatamente che  $x = 1$  (e quindi il punto  $(1, 0)$ ) è il punto di minimo assoluto di  $h$ , e che  $x = 0$  e  $x = 2$  sono i punti di massimo assoluti per  $h$ . I valori di minimo e di massimo assoluto sono  $m_0 = 0$  e  $M_0 = 1$ .

Esaminiamo ora il caso  $\beta > 0$ . Utilizziamo il metodo delle curve di livello

$$x^2 + y^2 - 2x + 1 = k \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 + y^2 = k$$

cioè le circonferenze di centro  $(1, 0)$  e raggio  $\sqrt{k}$ . Ricerchiamo

- il minimo valore  $k_{\min}$  tale che la circonferenza  $(x - 1)^2 + y^2 = k_{\min}$  intersechi  $R_\beta$  e il massimo valore  $k_{\max}$  tale che la circonferenza  $(x - 1)^2 + y^2 = k_{\max}$  intersechi  $R_\beta$ .

Si ha che

- $k_{\min} = 0$ , in corrispondenza alla circonferenza degenera di centro  $(1, 0)$  e raggio 0. Tale circonferenza si riduce ovviamente al solo punto  $(1, 0)$ . Quindi 0 è il valore di minimo assoluto, e  $(1, 0)$  il punto di minimo assoluto.
- Graficamente si vede che  $k_{\max}$  corrisponde alla circonferenza passante per i punti  $(0, 7\beta)$  e  $(2, 7\beta)$ . Imponendo che tali punti appartengano alla circonferenza  $(x - 1)^2 + y^2 = k_{\max}$ , si trova la condizione

$$k_{\max} = 1 + 49\beta^2,$$

che individua il valore di massimo assoluto assunto da  $f$  su  $R_\beta$ . I corrispondenti punti di massimo assoluto sono  $(0, 7\beta)$  e  $(2, 7\beta)$ .

**Esercizio assegnato.** Ritrovare lo stesso risultato nel seguente modo:

1. ricerco i punti di estremo liberi nell'interno di  $R_\beta$ , cioè in  $(0, 2) \times (0, 7\beta)$ , fra i punti stazionari di  $f$ . Trovo che non esistono punti stazionari interni.
2. Studio i punti di estremo relativo per  $f$  vincolati al bordo di  $R_\beta$ , studiando le restrizioni di  $f$  a ciascuno dei quattro lati di  $R_\beta$ .

Si noti che anche in questo caso non è possibile usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange in quanto non esiste alcuna funzione  $g$  di classe  $C^1$  tramite la quale si possa rappresentare il vincolo.

**Esercizio 5.** Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  determinare i punti di estremo relativo di

$$f(x, y) = \sin(y - \alpha x)$$

nell'insieme

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, 0 \leq y \leq -\frac{1}{x}e^x \right\}.$$

**Svolgimento.** Si osservi che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -\frac{1}{x}e^x \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{x}e^x \right) = 0.$$

Quindi l'insieme  $A$  non è limitato (e non è neppure chiuso). L'esistenza di punti di estremo assoluto per  $f$  in  $A$  non è più garantita dal teorema di Weierstrass, che non si applica in questo caso.

Tuttavia, osserviamo che

$$-1 \leq f(x, y) = \sin(y - \alpha x) \leq 1 \quad \forall (x, y) \in A$$

e che

$$\begin{aligned} \sin(y - \alpha x) = -1 &\Leftrightarrow y - \alpha x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \sin(y - \alpha x) = 1 &\Leftrightarrow y - \alpha x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Quindi per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  esistono infiniti punti di

$$\begin{cases} \text{minimo assoluto per } f \text{ in } A: \text{ i punti di } A \text{ sulle rette } y = \alpha x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ al variare di } k \in \mathbb{Z}, \\ \text{massimo assoluto per } f \text{ in } A: \text{ i punti di } A \text{ sulle rette } y = \alpha x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ al variare di } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

**Esercizio 6.** Determinare i punti di estremo assoluto di

$$f(x, y) = 3y|x + y|$$

sul quadrato  $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

**Svolgimento.** Passo 1: "elimino" il modulo. Considero i due triangoli

$$Q^+ = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] : y \geq -x\}, \quad Q^- = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] : y \leq -x\},$$

e osservo che  $Q = Q^+ \cup Q^-$ , che

$$(x, y) \in Q^+ \Leftrightarrow (-x, -y) \in Q^-$$

(cioè i due insiemi sono simmetrici rispetto a  $(0, 0)$ ), e, denotando con  $f|_{Q^+}$  e  $f|_{Q^-}$  le restrizioni di  $f$  a  $Q^+$  e a  $Q^-$ , si ha che

$$(1) \quad f|_{Q^+}(x, y) = -f|_{Q^-}(-x, -y) \quad \forall (x, y) \in Q^+.$$

Allora è sufficiente studiare i punti di estremo assoluto per  $f|_{Q^+}$  e poi, tenendo conto di (1), dedurre risultati su tutto  $Q$ .

Ora si noti che

$$f|_{Q^+}(x, y) = 3y(x + y) = 3yx + 3y^2 \quad \forall (x, y) \in Q^+.$$

Ricercare i punti stazionari interni a  $Q^+$  risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3y = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$$

da cui trovo che tutti i punti dell'asse  $x$  sono stazionari per la funzione  $(x, y) \mapsto 3yx + 3y^2$ . Quindi i punti stazionari interni a  $Q^+$  sono i punti di  $S = (0, 1) \times \{0\}$ . Osservando che  $f(x, 0) = 0$  per ogni  $(x, 0) \in S$ , per classificare i punti di  $S$  è sufficiente studiare il segno di  $(x, y) \mapsto 3yx + 3y^2$ . Da questo si vede che

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 & \forall (x, y) \in L_1 = \{(x, y) \in Q^+ : y = -x\}, \\ f(x, y) &\leq 0 & \forall (x, y) \in Q^+ \text{ tali che } y \leq 0, \\ f(x, y) &\geq 0 & \forall (x, y) \in Q^+ \text{ tali che } y \geq 0, \end{aligned}$$

e che quindi i punti di  $S$  sono tutti punti di sella per  $f$ .

Ricercare i punti di estremo assoluto per  $f$  su  $\partial Q^+ = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ , con

$$L_2 = \{(x, y) \in Q^+ : x = 1\}, \quad L_3 = \{(x, y) \in Q^+ : y = 1\}.$$

Essendo  $f$  identicamente nulla su  $L_1$  e strettamente positiva/strettamente negativa altrove, escludo di trovare dei punti di estremo assoluto su  $L_1$ . Considerazioni di segno mi portano a ricercare i punti di minimo assoluto su  $L_2^- = L_2 = \{(x, y) \in Q^+ : x = 1, y \in [-1, 0]\}$ . Osserviamo che

– la restrizione di  $f$  a  $L_2$  è

$$h(y) = f(1, y) = 3y(1 + y) = 3y + 3y^2, \quad y \in [-1, 1]$$

il cui punto di minimo assoluto è  $y = -\frac{1}{2} \in L_2^-$ . Il corrispondente valore di minimo assoluto è  $m = -\frac{3}{4}$ ; il punto di massimo assoluto è  $y = 1$ , e il corrispondente valore è  $M = 6$ .

– la restrizione di  $f$  a  $L_3$  è

$$j(x) = f(x, 1) = 3(x + 1) = 3x + 3, \quad x \in [-1, 1]$$

il cui punto di minimo assoluto è  $x = -1$ , in cui la  $j$  si annulla ( $f(-1, 1) = 0$ ), mentre il punto di massimo assoluto è  $x = 1$ , e il corrispondente valore è  $M = 6$ .

Concludiamo che  $(1, 1)$  è il punto di massimo assoluto per  $f$  su  $Q^+$  e che  $(1, -\frac{1}{2})$  è il punto di minimo assoluto per  $f$  su  $Q^+$ .

Poiché, a causa di (1),  $f(-1, -1) = -f(1, 1) = -6$ , concludiamo che il punto di minimo assoluto di  $f$  su  $Q$  è  $(-1, -1)$ , mentre  $(1, 1)$  è il punto di massimo assoluto di  $f$  su  $Q$ .

**Esercizio 7.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calcolare i valori di minimo e di massimo assoluto di  $f$  sul quadrato

$$Q = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, |y| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

**Svolgimento.** Uso le curve di livello:

$$3x^2 + 3y^2 + 2 = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{k-2}{3}$$

sono cioè le circonferenze di centro  $(0, 0)$  e raggio  $\sqrt{\frac{k-2}{3}}$  (quindi  $k \geq 2$ ). Considero tutti i valori di  $k \in [2, +\infty)$  tali che la circonferenza  $x^2 + y^2 = \frac{k-2}{3}$  abbia almeno un punto in  $Q$ .

Si ha  $k_{\min}$  in corrispondenza della circonferenza degenera  $x^2 + y^2 = 0$  (che degenera nel punto  $(0, 0)$ ), quindi

$$k_{\min} = 2 \Rightarrow \min_Q f = 2$$

e trovo che  $(0, 0)$  è il punto di minimo assoluto.

Trovo  $k_{\max}$  imponendo che  $Q$  sia inscritto nella circonferenza  $x^2 + y^2 = \frac{k_{\max}-2}{3}$ : quindi la condizione è che il punto  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  appartenga alla circonferenza, da cui

$$\frac{k_{\max}-2}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

da cui

$$k_{\max} = 5 \Rightarrow \max_Q f = 5$$

I quattro punti di massimo assoluto sono i punti di intersezione fra il quadrato e la circonferenza

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(si noti che questo è un risultato prevedibile per simmetria, in quanto  $f(x, y) = f(-x, y)$  e  $f(x, y) = f(x, -y)$ ).

---

**Esercizio assegnato.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = y^2 e^{-x^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calcolare i valori di minimo e di massimo assoluto di  $f$  sul triangolo

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 2 \leq y \leq 1\}$$

---

**Suggerimenti.**

- procedere con la ricerca di punti di estremo interni usando il metodo differenziale
- per lo studio dei punti di estremo vincolati a  $\partial T$ , non conviene usare le curve di livello

$$y^2 e^{-x^2} = k \quad ??$$

Conviene osservare che

$$\partial T = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

con

$$\begin{cases} S_1 : y = x - 2, & x \in [0, 3] \\ S_2 : y = -x - 2, & x \in [-3, 0] \\ S_3 : y = 1, & x \in [-3, 3] \end{cases}$$

e studiare le restrizioni di  $f$  a  $S_1$ ,  $S_2$ , e  $S_3$ .

Metodo alternativo: (per la ricerca di estremi su  $T$ ) Osservo che

$$f(x, y) = y^2 e^{-x^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

è prodotto di due funzioni non negative. Allora

$$(x_0, y_0) \text{ è punto di massimo per } (x, y) \mapsto y^2 e^{-x^2}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_0 \text{ è un punto di massimo per } x \mapsto e^{-x^2}, \\ y_0 \text{ è un punto di massimo per } y \mapsto y^2, \end{cases}$$

I punti di  $T$  hanno:

$$\begin{cases} \text{ascisse } -3 \leq x \leq 3, \\ \text{ordinate } -2 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

Quindi i punti di massimo sono .....

Il valore di massimo è....

Idem per la ricerca dei punti di minimo.

**N.B.:** **fondamentale** che  $f$  sia data dal prodotto di due funzioni non negative!! Altrimenti questo metodo non funziona!!

---