

Esempi di funzioni

1 Potenze ed esponenziali

Se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ allora definiamo

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}}$$

e, per convenzione, $x^0 = 1$. Se $n \in \mathbb{Z}$ allora definiamo

$$x^n = \begin{cases} x^n & \text{se } n \geq 0 \\ \frac{1}{x^{-n}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-x} & \text{se } x < 0 \text{ e } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si noti che se n è pari e $a < 0$ allora l'equazione $x^n = a$ non ha soluzione in \mathbb{R} ; inoltre, se $x < 0$ allora $\sqrt{x^2} \neq x$: ad esempio $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.

Se $q \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}^+$ allora definiamo

$$x^q = \sqrt[n]{x^m}$$

dove $q = m/n$ è una rappresentazione del numero razionale q come frazione.

Per $x < 0$ la definizione precedente ha senso solo se $n, m \in \mathbb{Z}$ sono coprimi (cioè non hanno fattori in comune); ad esempio

$$(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

che dovrebbe essere uguale a $(\sqrt[6]{-8})^2$ che non esiste. Invece si ha

$$(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Nel caso generale si definisce, per $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{q_n}$$

dove (q_n) è una successione di razionali il cui limite è α .

La funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che ad x associa x^α si dice *potenza di esponente α* , mentre la funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che ad x associa a^x si dice *esponenziale di base a* .

Per quanto detto in precedenza, la funzione potenza $x \mapsto x^\alpha$ ha come dominio \mathbb{R}^+ (numeri positivi) se $\alpha \in \mathbb{R}$, oppure ha come dominio \mathbb{R} se $\alpha \in \mathbb{Z}$.

La funzione esponenziale $x \mapsto a^x$ ha come dominio \mathbb{R} .

Proprietà delle potenze Se $x, y \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \in \mathbb{R}$:

- $1^a = 1$
- $a^0 = 1$
- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $x^{ab} = (x^a)^b$
- $(xy)^a = x^a y^a$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $x > 1, a > 0 \Rightarrow x^a > 1$
- $x > 1, a < 0 \Rightarrow x^a < 1$
- $x < 1, a > 0 \Rightarrow x^a < 1$
- $x < 1, a < 0 \Rightarrow x^a > 1$
- $x > 1, a < b \Rightarrow x^a < x^b$
- $x < 1, a < b \Rightarrow x^a > x^b$
- $x \leq y, a > 0 \Rightarrow x^a \leq y^a$
- $x \leq y, a < 0 \Rightarrow x^a \geq y^a$
- $x \neq 1, x^a = x^b \Rightarrow a = b$

2 Polinomi e funzioni razionali

Se $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sono funzioni qualsiasi e a_1, a_2, \dots, a_n sono numeri allora la funzione

$$F(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

si dice *combinazione lineare* delle $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ a coefficienti in a_1, a_2, \dots, a_n .

Un caso interessante si ha se $f_i(x) = x^i$: allora la combinazione lineare si dice *polinomio* e a_1, a_2, \dots, a_n si dicono i *coefficienti del polinomio*.

Ad esempio sono polinomi le funzioni seguenti (si noti che alcuni, o tutti, dei coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n possono essere nulli):

$$x^2 - 1, \quad -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}, \quad x^{100}, \quad -1, \quad 0$$

Il *grado* di un polinomio è il massimo esponente di una potenza della x che figura nel polinomio con un coefficiente non nullo.

NB: due polinomi sono uguali se e solo se hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti relativi alle stesse potenze della x , cioè

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{j=0}^m b_j x^j \iff n = m, \quad a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n$$

Un polinomio è una funzione che come dominio ha tutto \mathbb{R} ; rammentiamo alcune proprietà notevoli dei polinomi.

Se $P(x)$ è un polinomio allora esiste un numero $a \in \mathbb{R}$ tale che $P(a) = 0$ se e solo se esiste un polinomio $Q(x)$ tale che $P(x) = (x - a)Q(x)$.

In altri termini: risolvere l'equazione $P(x) = 0$ equivale a scomporre $P(x)$ come prodotto di polinomi di grado inferiore a quello di $P(x)$. Ad esempio se $P(x) = x^3 - 1$ allora $P(1) = 0$, ed infatti $P(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$; il polinomio $P(x) = x^2 + 1$ non si annulla mai, e quindi non è possibile fattorizzarlo in prodotto di polinomi di grado più piccolo.

Esistono al più n numeri distinti r_1, \dots, r_n tali che $P(r_i) = 0$, se n è il grado del polinomio $P(x)$.

Un numero r tale che $P(r) = 0$ si dice *radice* o *zero* del polinomio.

Un polinomio di grado dispari possiede sempre almeno una radice.

Per risolvere l'equazione $P(x) = 0$ esistono per $n = 1, 2, 3, 4$ (grado del polinomio) delle formule classiche che combinano i coefficienti del polinomio con somme, prodotti e radici.

Una *funzione razionale* è una funzione esprimibile come il quoziente di due polinomi

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

Una tale funzione ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_m\}$ dove r_1, \dots, r_m sono le radici del polinomio a denominatore.

3 Logaritmi

Se $y, b \in \mathbb{R}^+$ e $b \neq 1$ allora l'equazione $b^x = y$ ha una sola soluzione che si dice il *logaritmo in base b di y*, e si denota con $\log_b y$.

Proprietà dei logaritmi Se $x, y, a, b \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$ allora

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$
- $\log_a x = \frac{1}{\log_x a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $x < y, a > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a y$
- $x < y, a < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a y$

4 Esercizi

Calcolare i seguenti numeri reali:

- 1) $\sqrt[6]{64}$
- 2) $\sqrt[6]{(-2)^6}$
- 3) $\sqrt[5]{(-2)^5}$
- 4) $\sqrt[3]{(-40) \cdot 25}$
- 5) $\log_3 27$
- 6) $\log_2 \frac{1}{4}$
- 7) $\log_{\frac{1}{25}} 5$
- 8) $\log_{25} 5 + \log_{25} 125$

[le risposte sono sulla pagina seguente]

5 Risposte

- 1) 2
- 2) 2
- 3) -2
- 4) -10
- 5) 3
- 6) -2
- 7) $-\frac{1}{2}$
- 8) 2