5. Equazioni differenziali lineari di ordine superiore al I

Lo studio di equazioni differenziali lineari del II ordine parte dal seguente modello:

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) \begin{cases} = 0 & \text{omogenea} \\ = f(x), & \text{non omogenea} \end{cases}$$

Un'equazione di questo tipo (a coefficienti variabili: $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$) è piuttosto difficile da risolvere. La situazione si semplifica notevolmente se si identificano $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ con delle costanti reali assegnate.
In tal caso l'equazione diviene:

$$ay'' + by' + cy \begin{cases} =0 & \text{omogenea} \\ = f(x) & \text{non omogenea} \end{cases}$$

Prendiamo per il momento in considerazione l'equazione omogenea:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

con $a \neq 0$ (altrimenti si abbassa l'ordine dell'equazione differenziale, riducendola ad un'equazione a variabili separabili del I ordine). Sappiamo che tale equazione ammette sempre la soluzione **banale** $y = 0$; la teoria seguente sarà dedicata alla ricerca di soluzioni **non banali**.

Le soluzioni dell'equazione precedente godono delle seguenti **proprietà**:

- **Principio di linearità.** Se $\bar{y}(x)$ è una soluzione dell'equazione differenziale, anche $h\bar{y}(x)$, (con h numero reale non nullo.), è pure soluzione. Infatti:
  $$a(h\bar{y}'') + b(h\bar{y}') + c(h\bar{y}) = h[a\bar{y}''+ b\bar{y}'+ c\bar{y}] = h \cdot 0 = 0$$
  dato che deve valere identicamente la relazione: $a\bar{y}''+ b\bar{y}'+ c\bar{y} = 0$.

- **Principio di sovrapposizione**. Se $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(x)$ sono due soluzioni, allora, per quanto detto prima, anche $h\bar{y}_1$ e $k\bar{y}_2$ (h e k costanti reali) sono pure soluzioni e la loro combinazione lineare è ancora soluzione dell'equazione data.
  Infatti:
  - Siccome $\bar{y}_1$ è soluzione, si ha: $a\bar{y}_1'' + b\bar{y}_1' + c\bar{y}_1 \equiv 0$
  - Siccome $\bar{y}_2$ è soluzione, si ha: $a\bar{y}_2'' + b\bar{y}_2' + c\bar{y}_2 \equiv 0$

È immediato verificare che anche la combinazione lineare di $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$:

$$h\bar{y}_1 + k\bar{y}_2 \qquad \text{con } (h, k \in \mathbb{R})$$

soddisfa l'equazione differenziale data:

$$a\cdot[h\bar{y}_1 + k\bar{y}_2]'' + b\cdot[h\bar{y}_1 + k\bar{y}_2]' + c\cdot[h\bar{y}_1 + k\bar{y}_2] =$$
$$h\cdot[\,a\bar{y}_1'' + b\bar{y}_1' + c\bar{y}_1] + k\cdot[\,a\bar{y}_2'' + b\bar{y}_2' + c\bar{y}_2] = h \cdot 0 + k \cdot 0 = 0.$$

5.1 Soluzione di un'equazione differenziale lineare ed omogenea del II ordine

Per risolvere l'equazione differenziale lineare omogenea del II ordine:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

si cercano le soluzioni nella classe di funzioni di tipo esponenziale:

$$y = e^{p \cdot x} \qquad \text{con } (p \in \mathbb{C}).$$

La scelta di funzioni esponenziali ha il vantaggio di avere a che fare con funzioni che si mantengono sempre positive.

La sostituzione della funzione esponenziale nell'equazione precedente permette di costruire l'**equazione caratteristica**.

Costruiamo le derivate di $y = e^{p \cdot x}$, fino all'ordine che ci interessa:

$$y' = pe^{p \cdot x} \qquad y'' = p^2 e^{p \cdot x}$$

Sostituendo nell'equazione assegnata, si ottiene:

$$a\,(p^2 e^{p \cdot x}) + b\,(pe^{p \cdot x}) + c\,e^{p \cdot x} = e^{p \cdot x} \cdot (ap^2 + bp + c) = 0$$

da cui: $ap^2 + bp + c = 0$.

L'equazione **algebrica**, così ottenuta, si chiama **equazione caratteristica** associata all'equazione differenziale.

L'equazione caratteristica ammette due radici che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti o complesse coniugate.

La quantità che determina il tipo di radici è il valore del **discriminante** dell'equazione caratteristica: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dobbiamo studiare i tre casi seguenti:

- **Primo caso**

  $\Delta > 0$: si hanno due radici reali e distinte: $p_1 \neq p_2$.

  Le due soluzioni dell'equazione differenziale sono:

  $$\bar{y}_1 = e^{p_1 x} \quad \text{e} \quad \bar{y}_2 = e^{p_2 x}$$

  da cui si ottiene la soluzione generale dell'equazione differenziale:

  $$y(x) = A\ e^{p_1 x} + B\ e^{p_2 x} \quad (A, B \text{ costanti reali arbitrarie})$$

- **Secondo caso**

  $\Delta = 0$: le due radici sono reali e coincidenti: $p_1 = p_2 = p$.

  In tal caso si ha una sola soluzione, ma si dimostra che, in questo caso, se $y_1 = e^{p \cdot x}$ è soluzione, anche $y_2 = x \cdot e^{p \cdot x}$ è soluzione della equazione differenziale.

  La soluzione generale dell'equazione differenziale diviene:

  $$y(x) = Ae^{px} + Bxe^{px} = e^{px}(A + Bx) \quad (A, B \text{ costanti reali arbitrarie})$$

  Oss. Si noti la forma della soluzione generale che è data dal prodotto della funzione esponenziale per un polinomio di I grado: ordine dell'equazione differenziale diminuito di un'unità.

- **Terzo caso**

  $\Delta < 0$: le due radici sono complesse coniugate:

  $$p_1 = \alpha + i\beta \ ; \ p_2 = \alpha - i\beta \quad \text{con } (\alpha, \beta \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1})$$

  Le due soluzioni dell'equazione caratteristica sono:

  $$\bar{y}_1 = e^{(\alpha + i\beta) \cdot x} \quad \text{e} \quad \bar{y}_2 = e^{(\alpha - i\beta) \cdot x}$$

  Siccome vogliamo esprimere la soluzione in forma reale, dobbiamo manipolare gli esponenziali che compaiono nella soluzione.

  La soluzione generale si può scrivere:

  $$y(x) = A\bar{y}_1 + B\bar{y}_2 = Ae^{(\alpha + i\beta)x} + Be^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}\left[Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}\right] \quad (A, B \in \mathbb{C})$$

Utilizzando le formule di Eulero:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

e introducendo due nuove costanti reali , si perviene alla soluzione in forma reale:

$$y(x) = e^{\alpha x} \cdot H \cdot \cos(\beta x + \gamma) \qquad H, \gamma\text{: costanti arbitrarie reali.}$$

$$= e^{\alpha x} \cdot K \cdot \operatorname{sen}(\beta x + \delta) \qquad K, \delta\text{: costanti arbitrarie reali.}$$

5.2 Equazione lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine n

L'equazione differenziale, lineare ed omogenea di ordine n si può ricondurre al seguente tipo:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Ove i coefficienti a_k ($k=0, 1,\ldots, n$) sono costanti reali assegnate. L'equazione precedente si può scrivere, in forma compatta, nel seguente modo:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)} = 0$$

pur di identificare la derivata di ordine zero con la funzione incognita stessa: $y^{(0)} = y$.
Si constata che l'equazione ammette sempre la soluzione **banale** $y = 0$, ma lo scopo è di ricercare eventuali soluzioni **non banali** ($y \neq 0$).

Si verifica immediatamente che vale una proprietà analoga a quella enunciata precedentemente:

Principio di sovrapposizione: se $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ sono soluzioni dell'equazione differenziale, anche la loro combinazione lineare è pure soluzione dell'equazione differenziale:

$$\bar{y} = c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 + \ldots + c_n \bar{y}_n \qquad (c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ costanti reali})$$

Si cercano ancora le soluzioni tra le funzioni esponenziali del tipo

$$y = e^{p \cdot x} \quad (p \in \mathbb{C}).$$

Si costruiscono le derivate successive della funzione esponenziale e si perviene alle relazioni:

$$\begin{aligned} y' &= p e^{p \cdot x}, \\ y'' &= p^2 e^{p \cdot x}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n-1)} &= p^{n-1} e^{p \cdot x}, \\ y^{(n)} &= p^n e^{p \cdot x}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza:

$$\left(a_n p^n e^{px} + a_{n-1} p^{n-1} e^{px} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_2 p^2 e^{px} + a_1 p^1 e^{px} + a_0 e^{px}\right) = 0$$

$$\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_2 p^2 + a_1 p^1 + a_0\right) \cdot e^{px} = 0$$

Si perviene all'**equazione caratteristica** associata:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

che è un'equazione algebrica di grado n nell'incognita p che conviene pensare come appartenente al campo complesso per poter sfruttare il **teorema fondamentale dell'algebra**:

Un'equazione algebrica di grado n ammette, nel campo complesso, esattamente n radici.

Anche in questa circostanza possiamo ridurci allo studio dei 3 casi seguenti:

- **Primo caso**
  Tutte le radici sono reali e distinte: $p_1 \neq p_2 \neq p_{n-1} \neq p_n \quad (p \in \mathbb{R})$.
  Gli integrali corrispondenti alle radici individuate sono:

  $$\bar{y}_1 = e^{p_1 x}, \quad \bar{y}_2 = e^{p_2 x}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \bar{y}_n = e^{p_n x}$$

  Costruendo la loro combinazione lineare, si ottiene la soluzione generale dell'equazione differenziale:

  $$y(x) = A_1 e^{p_1 x} + A_2 e^{p_2 x} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_n e^{p_n x} \qquad \text{con } A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n \in \mathbb{R}.$$

- **Secondo caso**
  Radici reali con molteplicità maggiore di uno .
  Se h radici sono coincidenti, ad esempio: $p_1 = p_2 = \ldots = p_h = \bar{p}$,
  le soluzioni corrispondenti a tali radici si esprimono nel modo seguente:

  $$y_1 = e^{\bar{p}x} \; ; \; y_2 = x\, e^{\bar{p}x} \; ; \; \ldots \; ; \; y_h = x^{h-1} e^{\bar{p}x}$$

  La soluzione relativa a tali radici si scrive utilizzando il principio di sovrapposizione, come nel caso precedente.

- **Terzo caso**
  Alcune radici sono complesse coniugate.
  Se una radice è della forma:

  $$p_1 = \alpha + i\,\beta \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

  allora anche la sua complessa coniugata è pure radice:

  $$\bar{p}_1 = \alpha - i\,\beta \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

  Le soluzioni corrispondenti a tale coppia si scrivono:

  $$y = He^{(\alpha+\imath\beta)\cdot x} + Ke^{(\alpha-\imath\beta)\cdot x} \qquad \text{con } H, K \in \mathbb{C}$$
  $$y = e^{\alpha x}\,[H\, e^{\imath\beta x} + Ke^{-\imath\beta x}]$$

  Utilizzando, come nel caso precedente, le formule di Eulero si perviene alla soluzione reale:

  $$y(x) = e^{\alpha x}[A \cdot \cos(\beta x + \gamma)] \qquad \text{con } A, \gamma \text{ costanti arbitrarie reali.}$$

Esercizio 1: Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y''' + y'' - 2y' = 0$$

Si associa all'equazione differenziale l'equazione caratteristica corrispondente:

$$p^3 + p^2 - 2p = 0 \quad \Rightarrow \quad p(p^2 + p - 2) = 0$$

Le soluzioni sono:

$$p_1 = 0 \; ; \; p_2 = 1 \; ; \; p_3 = -2$$

L'equazione caratteristica ammette tre radici reali e distinte e gli integrali corrispondenti sono:

$$y_1 = e^{0\cdot x} \; ; \; y_2 = e^{1\cdot x} \;\text{ e }\; y_3 = e^{(-2)\cdot x}.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è quindi:

$$y(x) = Ay_1 + By_2 + Cy_3 = A + Be^x + Ce^{-2x} \qquad \text{con } A, B, C \text{ costanti reali.}$$

5.3 Caso dell'equazione differenziale lineare e non omogenea

Il modello si presenta nella seguente forma:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)} = f(x)$$

Ove $f(x)$ è una funzione assegnata della variabile indipendente.
La soluzione generale si ottiene in due passi:

- Si risolve l'equazione omogenea associata:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)} = 0$$

- Si cerca una soluzione particolare $u(x)$ dell'equazione non omogenea.
- La soluzione generale si può scrivere come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea associata e della soluzione particolare dell'equazione non omogenea:

$$y(x) = y_{om}(x) + u(x)$$

Esercizio 2: Risolvere la seguente equazione differenziale lineare non omogenea:

$$y''' + y'' - 2y' = x^2$$

La soluzione dell'equazione omogenea associata è stata calcolata nell'esercizio 1:

$$y_{om}(x) = A + Be^x + Ce^{-2x} \qquad \text{con } (A, B, C \in \mathbb{R})$$

Si deve ora determinare la soluzione particolare. Si cerca ora di trovare una soluzione particolare $u(x)$, mediante polinomi di tipo simile a quello del II membro, ossia:

$$u(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{con } (a, b, c \in \mathbb{R})$$

ove i coefficienti del polinomio vanno determinati in base all'equazione assegnata.
Calcoliamo le derivate di $u(x)$ fino all'ordine che ci interessa:

$u'(x) = 2ax + b$
$u''(x) = 2a$
$u'''(x) = 0$

Per trovare i coefficienti del polinomio che soddisfa all'equazione, utilizziamo il principio di identità dei polinomi, sostituendo nell'equazione si ricava:

$$0 + (2a) - 2(2ax + b) = x^2$$

Poiché al primo membro si ha un polinomio di 1° grado, mentre al secondo membro compare un polinomio di 2° grado, non potrà mai sussistere l'identità.
Proviamo ad aumentare il grado del polinomio $u(x)$:

$$u(x) = hx^3 + kx^2 + lx + m \qquad (\text{ove } h, k, l, m \in \mathbb{R})$$

Calcoliamo le derivate fino all'ordine che ci interessa:

$u'(x) = 3hx^2 + 2kx + l$
$u''(x) = 6hx + 2k$
$u'''(x) = 6h$

Sostituendo nell'equazione assegnata, si ottiene:

$$6h + (6hx + 2k) - 2(3hx^2 + 2kx + l) = x^2$$

Ordinando per potenze decrescenti di x, si ricava:

$$-6hx^2 + x(6h - 4k) + 6h + 2k - 2l = x^2$$

Per il principio di identità dei polinomi, devono valere le relazioni:

$$\begin{cases} -6h = 1 \\ 6h - 4k = 0 \\ 6h + 2k - 2l = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h = -\frac{1}{6} \\ 6\left(-\frac{1}{6}\right) - 4k = 0 \\ 6\left(-\frac{1}{6}\right) + 2\left(-\frac{1}{4}\right) - 2l = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h = -\frac{1}{6} \\ k = -\frac{1}{4} \\ l = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Quindi la soluzione particolare è:

$$u(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + m$$

Combinando le due soluzioni ricavate: quella dell'equazione omogenea e la soluzione particolare $u(x)$:

$$y_{om} = A + Be^x + Ce^{-2x} \qquad u(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + m$$

si ottiene la soluzione generale dell'equazione non omogenea:

$$y(x) = Be^x + Ce^{-2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \text{costante}$$

5.3.1 Equazione differenziale lineare non omogenea: il metodo di Wronski

Limitiamoci, per semplicità al caso di un'equazione lineare non omogenea del 2° ordine:

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

La soluzione, come nell'esempio precedente, si ottiene in due passi:

- Si determina la soluzione generale dell'equazione omogenea associata. Siano y_1 e y_2 i due integrali. La soluzione dell'equazione omogenea associata è:

$$y_{om} = Ay_1 + By_2 \quad \text{con } (A, B \in \mathbb{R})$$

- Si cerca l'integrale particolare tra le funzioni del tipo:

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

in cui y_1 e y_2 sono le soluzioni della equazione omogenea e si sono sostituite le costanti A e B con due funzioni incognite $u(x)$ e $v(x)$ da determinare in base all'equazione differenziale assegnata. Apparentemente la situazione è di non facile soluzione, poiché si devono determinare due funzioni incognite avendo a disposizione una sola condizione su di esse. L'idea di Wronski è di introdurre un **vincolo** sulle due funzioni incognite che non sia in contrasto con il problema da risolvere.
Usualmente si affianca all'equazione differenziale, la seguente condizione:

$$u'(x)y_1 + v'(x)y_2 = 0.$$

Utilizzando la condizione imposta, si calcola la derivata prima di y_p:

$$y'_p = u'y_1 + uy'_1 + v'y_2 + vy'_2 = uy'_1 + vy'_2 + \cancel{(u'y_1 + v'y_2)} = uy'_1 + vy'_2$$

Derivando nuovamente:

$$y''_p = u'y'_1 + uy''_1 + v'y'_2 + v\,y''_2$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, si ottiene:

$$a(u'y'_1 + uy''_1 + v'y'_2 + v\,y''_2) + b(uy'_1 + vy'_2) + c(uy_1 + vy_2) = g(x)$$

Raccogliendo i termini in u e v, l'equazione diventa:

$$u\,(a\,y''_1 + b\,y'_1 + c\,y_1) + v(a\,y''_2 + b\,y'_2 + c\,y_2) + a(u'y'_1 + v'y'_2) = g(x)$$

Siccome y_1 e y_2 soddisfano all'equazione omogenea associata, si perviene ad una equazione differenziale del I ordine nelle due funzioni incognite $u(x)$ e $v(x)$:

$$a(u'y'_1 + v'y'_2) = g(x)$$

che va accoppiata con il vincolo imposto: $u'y_1 + v'y_2 = 0$
Si perviene così ad un sistema di due equazioni differenziali del I ordine nelle due funzioni incognite $u(x)$ e $v(x)$.
Il sistema è:

$$\begin{cases} u'\,y_1 + v'\,y_2 = 0 \\ u'\,y'_1 + v'\,y'_2 = \dfrac{g(x)}{a} \end{cases}$$

Si deve pertanto risolvere un sistema lineare formato da due equazioni differenziali nelle incognite $u'(x)$ e $v'(x)$. Affinché il sistema sia risolubile bisogna che per il teorema di **Cramer** la matrice dei coefficienti abbia determinate diverso da zero.
La matrice dei coefficienti si chiama matrice di Wronski o più brevemente Wronskiana:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \quad ; \ \det W = y_1y'_2 - y_2y'_1 \neq 0.$$

Se tale condizione è verificata, per il teorema di Cramer esiste una ed una sola soluzione del sistema precedente. In tale ipotesi, si ottiene:

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{g(x)}{a} & y'_2 \end{vmatrix}}{\det W} = \frac{-\dfrac{y_2}{a}\cdot g(x)}{\det W} \qquad v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & \dfrac{g(x)}{a} \end{vmatrix}}{\det W} = \frac{\dfrac{g(x)}{a}\cdot y_1}{\det W}$$

Una volta note le derivate di $u(x)$ e di $v(x)$, si possono determinare le primitive di tali funzioni mediante integrazione.
Il metodo di Wronski ha validità generale, ma è piuttosto lungo nel generare la soluzione particolare dell'equazione differenziale. Con opportune modifiche tale metodo può essere esteso ad equazioni differenziali lineari e non omogenee di ordine superiore al secondo.

5.3.2 Equazione differenziale lineare non omogenea: Metodo della funzione di prova

Esiste un metodo rigoroso che permette di determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea che verrà illustrato più avanti, ed un metodo empirico (basato sul metodo rigoroso) che permette di individuare più rapidamente, in casi particolari, la soluzione.
Tale metodo si basa sull'esame della funzione $f(x)$ che compare al II membro dell'equazione differenziale in esame:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad \text{con } (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Vi sono alcuni tipi di espressione di $f(x)$ che permettono di individuare tra quali funzioni bisogna cercare l'integrale particolare. Lo schema che si usa è il seguente:

$f(x)$	$u(x)$
$P_n(x)$	$x^m A_n(x)$
$P_n(x)e^{rx}$	$x^m A_n(x)e^{rx}$
$P_n(x)e^{rx}\cos(kx)$	$x^m e^{rx}[A_n(x)\cos(kx)+B_n(x)\text{sen}(kx)]$
$P_n(x)e^{rx}\text{sen}(kx)$	$x^m e^{rx}[A_n(x)\cos(kx)+B_n(x)\text{sen}(kx)]$

ove $P_n(x)$, $A_n(x)$, $B_n(x)$ sono dei polinomi nell'indeterminata x di grado uguale a quello dell'indice del polinomio stesso; m è il più piccolo tra gli interi 0, 1, 2 che assicuri che nessun termine $u(x)$ sia soluzione dell'equazione omogenea associata: $ay''+by'+cy = 0$.

Data l'equazione differenziale:

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

la condizione che la matrice di Wronski abbia determinante diverso da zero, assicura che le funzioni, che sono soluzioni dell'equazione omogenea associata, siano fra di loro **funzionalmente indipendenti.**
Tale definizione vale solo **nell'ambito** della teoria delle equazioni differenziali lineari e non omogenee.
Il metodo di Wronski si può applicare anche ad equazioni lineari di ordine qualsiasi. Se l'equazione differenziale è di ordine *n,* la matrice di Wronski associata è:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Esercizio 3: Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' - 3y' + 2y = 4x$$

L'equazione omogenea associata è:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

che ammette la seguente equazione caratteristica:

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

Le radici sono $p_1 = 1$ e $p_2 = 2$.
La soluzione generale dell'equazione omogenea associata si scrive:

$$y_{om}(x) = Ae^{2x} + Be^x$$

- Utilizzando il metodo della funzione di prova, si ottiene:
  $u(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$
  $u'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
  $u''(x) = 6ax + 2b$
  Sostituendo nell'equazione data:

$$(6ax + 2b) - 3(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 4x$$
$$\Rightarrow \ 2ax^3 + (-9a + 2b)\, x^2 + (6a - 6b + 2c)x + (2b - 3c + 2d) = 4x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ -9a + 2b = 0 \\ 6a - 6b + 2c = 4 \\ 2b - 3c + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ 2c = 4 \\ -6 + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow \ u(x) = 2x + 3$$

La soluzione dell'equazione proposta è: $y(x) = Ae^{2x} + Be^{x} + 2x + 3$.

- Proviamo ora con il metodo di Wronski per verificare che si perviene allo stesso risultato: Sappiamo che:

$$y_{om}(x) = Ae^{2x} + Be^{x}$$

Cerchiamo le soluzioni tra le funzioni del tipo:

$$y = A(x)e^{2x} + B(x)e^{x}$$

soggette al vincolo:

$$A'(x)e^{2x} + B'(x)e^{x} = 0$$

Calcoliamo y' e y'':

$$y' = A'e^{2x} + 2Ae^{2x} + B'e^{x} + Be^{x} = 2Ae^{2x} + Be^{x}$$
$$y'' = 2A'e^{2x} + 4Ae^{2x} + B'e^{x} + Be^{x}$$

Sostituendo nell'equazione data, si trova:

$$(2A'e^{2x} + \cancel{4Ae^{2x}} + B'e^{x} + \cancel{Be^{x}}) - \cancel{3}(\cancel{2Ae^{2x}} + \cancel{Be^{x}}) + \cancel{2}(\cancel{Ae^{2x}} + \cancel{Be^{x}}) = 4x$$
$$2A'e^{2x} + B'e^{x} = 4x$$

Si risolve il sistema formato da questa ultima equazione e la relazione di vincolo:

$$\begin{cases} 2A'e^{2x} + B'e^{x} = 4x \\ A'(x)e^{2x} + B'(x)e^{x} = 0 \end{cases}$$

La matrice Wronskiana vale:

$$W = \begin{vmatrix} 2e^{2x} & e^{x} \\ e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix} \ ; \ \det W = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0$$

Il determinante di tale matrice è sempre non nullo essendo un esponenziale
Calcoliamo ora $A'(x)$ e $B'(x)$:

$$A' = \frac{\begin{vmatrix} 4x & e^{x} \\ 0 & e^{x} \end{vmatrix}}{e^{3x}} = \frac{4xe^{x}}{e^{3x}} = 4xe^{-2x} \qquad B' = \frac{\begin{vmatrix} 2e^{2x} & 4x \\ e^{2x} & 0 \end{vmatrix}}{e^{3x}} = \frac{-4xe^{2x}}{e^{3x}} = -4xe^{-x}$$

Integrando per parti, si ricava:

$$A = 4\int xe^{-2x}dx = 4\int xe^{-2x}dx = 4x(-\frac{1}{2}e^{-2x}) + 4\int \frac{1}{2}e^{-2x}dx =$$
$$= -\frac{4}{2}xe^{-2x} + \frac{4}{2}\,(-\frac{1}{2}e^{-2x}) = e^{-2x}(-2x-1)$$

$B \quad = -4\int xe^{-x}dx = -4\int xe^{-x}dx \ = 4x(e^{-x}) - 4\int e^{-x}dx \ =$

$= 4xe^{-x} + 4e^{-x} = 4e^{-x}(x+1)$

L'integrale particolare dell'equazione non omogenea è, quindi:

$$u(x) = A(x)e^{2x} + B(x)e^{x} = e^{-2x}(-2x-1)\, e^{2x} + 4e^{-x}(x+1)\, e^{x}$$

$$= -2x - 1 + 4x + 4 = 2x + 3$$

Come volevamo verificare abbiamo ottenuto lo stesso risultato.

Oss. Il metodo della funzione di prova permette di costruire la tabella vista precedentemente e si basa sul metodo di Wronski, quindi non è un metodo alternativo, ma solo una scorciatoia per evitare calcoli notevolmente lunghi.
Il metodo della funzione di prova è limitato solo ad alcune categorie di funzioni e non è adattabile a qualsiasi funzione assegnata. Ovviamente se la funzione non ricade in una delle categorie precedenti è indispensabile usare il metodo di Wronski.

Esercizio 4: Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + 4y = \text{sen}x$$

L'equazione omogenea associata è:

$$y'' + 4y = 0$$

che ammette come equazione caratteristica: $p^2+4 = 0$. Le soluzioni di tale equazione sono: $p = \pm 2i$.
La soluzione dell'equazione omogenea è:

$$y_{om}(x) = Ae^{2ix} + Be^{-2ix} = C\cos(2x+\alpha)$$

$$= C(\cos 2x \cos\alpha - \text{sen}2x\, \text{sen}\alpha) = H\cos 2x + K\text{sen}2x$$

ove si è usata l'identificazione: $H = C\cos\alpha$ e $K = -C\text{sen}\alpha$.

Per trovare le soluzioni dell'equazione non omogenea con il metodo di Wronski, conviene partire dalla soluzione dell'equazione omogenea nella forma:

$$u(x) = H(x)\cos 2x + K(x)\,\text{sen}2x$$

soggetta al vincolo:

$$H'(x)\cos 2x + K'(x)\text{sen}2x = 0$$

$$u(x) = H(x)\cos 2x + K(x)\text{sen}2x$$
$$u'(x) = \cancel{H'(x)\cos 2x} - 2H(x)\text{sen}2x + \cancel{K'(x)\text{sen}2x} + 2K(x)\cos 2x$$
$$u''(x) = -2H'(x)\text{sen}2x - 4H(x)\cos 2x + 2K'(x)\cos 2x - 4\,K(x)\text{sen}2x$$

Sostituendo nell'equazione assegnata, si ottiene:

$$-2H'(x)\text{sen}2x - 4\cancel{H(x)\cos 2x} + 2K'(x)\cos 2x - 4\,\cancel{K(x)\text{sen}2x} + 4(\cancel{H(x)\cos 2x} + \cancel{K(x)\text{sen}2x}) = \text{sen}x$$

Pertanto, il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} -2H'(x)\text{sen}2x + 2K'(x)\cos 2x = \text{sen}x \\ H'(x)\cos 2x + K'(x)\text{sen}2x = 0 \end{cases}$$

La matrice Wronskiana vale:

$$W = \begin{vmatrix} -2\text{sen}2x & 2\cos 2x \\ \cos 2x & \text{sen}2x \end{vmatrix} \quad ; \det W = -2\text{sen}^2 2x - 2\cos^2 2x = -2 \neq 0$$

Da cui:

$$H' = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathrm{sen}x & 2\cos 2x \\ 0 & \mathrm{sen}2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\mathrm{sen}2x\,\mathrm{sen}x$$

$$K' = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2\mathrm{sen}2x & \mathrm{sen}x \\ \cos 2x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos 2x\,\mathrm{sen}x$$

Dalle relazioni:

$$H' = -\frac{1}{2}\mathrm{sen}2x\mathrm{sen}x \quad \text{e} \quad K' = \frac{1}{2}\cos 2x\mathrm{sen}x$$

Si ottengono le due primitive:

$$H(x) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{sen}2x\mathrm{sen}x dx = -\frac{1}{2}\int 2\mathrm{sen}^2 x\cos x dx = -\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}\mathrm{sen}^3 x = -\frac{1}{3}\mathrm{sen}^3 x$$

$$K(x) = \frac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{sen}x dx = \frac{1}{2}\int (\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x)\mathrm{sen}x dx = \frac{1}{2}\int (2\cos^2 x - 1)\mathrm{sen}x dx =$$

$$= \int \cos^2 x\mathrm{sen}x dx - \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{2}\cos x$$

che sostituite nella relazione $u(x)=H\cos 2x + K\,\mathrm{sen}2x$ permettono di determinare la soluzione particolare dell'equazione proposta.

La soluzione quindi è:

$$y(x) = H(x)\cos 2x + K(x)\mathrm{sen}2x = \frac{1}{3}\mathrm{sen}^3 x\cos 2x + \left(-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{2}\cos x\right)\mathrm{sen}2x$$