§7 Funzioni di due variabili: limiti, continuità , derivabilità , differenziabilità , punti critici vincolati e non vincolati

Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

Il simbolo **Es:** significa la presenza di una o più domande a cui ancora non si è data una risposta o per motivi di tempo o perché non si è riusciti nell'intento

1.7 Studiare la continuità delle seguenti funzioni laddove sono definite e studiare l'esistenza del limite in tutti i punti di $\mathbf{R}^2$ dove è definibile[(1.7)]

1) $f(x,y)=\sin(x^2y)$, $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$, $f(x,y)=\sin(e^{\frac{x}{y}})$

2) Sia $\underline{x}_o\in\dot{\mathbf{R}}^2\backslash\mathbf{R}^2$. Si dica quale delle seguenti due affermazioni è vera (eventualmente tutte e due):
$E=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \ \mid x>a,\ y>a,\ a>0\}$ $\quad x^2y\colon E\to\mathbf{R}$ $\quad \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o}x^2y=+\infty$
$E=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \ \mid x>0,\ y>0\}$ $\quad x^2y\colon E\to\mathbf{R}$ $\quad \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o}x^2y=+\infty$

2.7 – Parte prima – Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità delle seguenti funzioni

$$f_1(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}\qquad f_2(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}\qquad f_3(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}$$

$$f_4(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}\qquad f_5(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \end{cases}\qquad f_6(\underline{x})=\begin{cases}1 & \text{se } |y|\geq x^2\\ 1 & \text{se } y=0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$$f_7(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}\qquad f_8(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(x+\sin y)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}$$

$$f_9(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4+xy}{(y^4+3x^4)^\alpha} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=0\end{cases}\qquad f_{10}(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^2-x^2y}{(y^2+x^2)^\alpha} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=0\end{cases}$$

$$f_{11}(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{(3x^2+\sin^4 y)^\alpha}{(4y^2+x^2)} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=0\end{cases}\qquad f_{12}(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{\arctan(x\sin^4 y)}{(e^{x^4+y^4}-1)} & \underline{x}\neq 0\\ 0 & \underline{x}=0\end{cases}$$

– Parte seconda – Per f_1 ed f_2 si dica quale dei seguenti limiti esiste:
$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o}f(\underline{x})=+\infty$ con $\underline{x}_o\in(\dot{\mathbf{R}}^2\backslash\mathbf{R}^2\ )\cap E_i \quad i=1,2,3,4$
$E_1=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\,:\,x>0,\ y>0\}$, $E_2=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\,:\,x>a,\ y>a,\ a>0\}$, $E_3=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\,:\,y>\frac{1}{10}x,\ y<10x,\ x>0\}$, $E_4=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\,:\,y>\frac{1}{10}x,\ y<10x,\ x>a,\ a>0\}$,

(1.7) Applicare la definizione *(7.2) di pag.292.* Per le definizioni di $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^*$, $\dot{\mathbf{R}}$, si veda *il capitolo 3 del libro di testo*

3.7*** Al variare di α nei reali si trovi il dominio ed i punti in cui la funzione seguente ammette limite (anche $+\infty$ oppure $-\infty$): $f(\underline{x}) = \dfrac{x}{\cos^2\frac{x}{y} + \sin^2\frac{\alpha x}{y}}$

4.7 Determinare i punti di continuità delle seguenti funzioni (f_{10} è da svolgersi dopo avere studiato gli integrali). f_4 è dovuta a H.A. Schwarz in un lavoro del 1873. f_{11} è dovuta a G.Peano in un lavoro del 1884. Tutte e due le funzioni servono da esempi per cui $\frac{\partial^2 f(\underline{0})}{\partial x\partial y} \neq \frac{\partial^2 f(\underline{0})}{\partial y\partial x}$

$$f_1(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{y} & y > 0 \\ 1 & y \leq 0 \end{cases} \qquad f_2(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases} \qquad f_3(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{xy^2}}{2y^2} & y > 0 \\ -x/2 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$f_4(\underline{x}) = \begin{cases} x^2 \arctan\dfrac{y}{x} - y^2 \arctan\dfrac{x}{y} & \underline{x} \neq (0,y) \wedge (x,0) \\ 0 & \underline{x} = (0,y) \vee (x,0) \end{cases} \qquad f_5(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y-x} & y \neq x \\ 0 & y = x \end{cases}$$

$$f_6(\underline{x}) = \begin{cases} ye^{-y/x^2} & \text{se } y \geq 0,\ x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f_7(\underline{x}) = \begin{cases} e^{-(1-x^2-y^2)^{-1}} & x^2+y^2 < 1 \\ 0 & x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$f_8(\underline{x}) = \begin{cases} e^{-(1-x^2-3y^2)^{-1}} & x^2+3y^2 < 1 \\ 0 & x^2+3y^2 \geq 1 \end{cases} \qquad f_9(\underline{x}) = \begin{cases} x^3+2y^2 & \text{se } y^2 \leq x^3 \\ x^3+y^4 & \text{se } y^2 > x^3 \end{cases}$$

$$f_{10}(\underline{x}) = \int_x^y dz \sin\frac{1}{z} \qquad f_{11}(\underline{x}) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 \quad \text{se } \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

5.7 Data la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} (|x| + |y|^{2\beta})\left(1 - \sqrt{1 + \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Stabilire se le derivate parziali sono continue in $\mathbf{R}^2$ e calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}} f(0,0)$ dove $\underline{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; stabilire per quali valori del parametro reale β essa è continua, derivabile, differenziabile in $(0,0)$.

6.7 1) Data la funzione $f(\underline{x}) = 2x^2 - xy + y^2$ e $\underline{v}_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Determinare la derivata direzionale $D_{\underline{v}_\alpha} f(-1,2)$. Per quale $\underline{v}_\alpha$ è minima $D_{\underline{v}_\alpha} f(-1,2)$? Discutere la convessità di $g(\underline{x}) = 2x^2 - \beta xy + y^2$ al variare di $\beta \in \mathbf{R}$.

2) Studiare i punti critici della funzione $f(x,y) = (x+y)^2 - x^4 - y^4$

7.7 Per la funzione di due variabili $f(\underline{x}) = x^\alpha y^\beta + 2x$ si:
i) trovi il piano tangente nel punto $(1,1)$
ii) determini la convessità in un intorno di $(1,1)$ al variare di $\alpha < 0$ e $\beta < 0$
iii) determini per quali valori reali di α e β ($\alpha + \beta = 1$ compreso) esiste un intorno U di $(1,1)$ tale che $f(\underline{x}) < ax + by + c$ per $\underline{x} \in U \backslash (1,1)$.

8.7 Data la funzione $f(\underline{x}) = -xye^{-x^2+y}$. i) Dimostrare usando la definizione che è continua nel punto $(1,1)$ ii) Determinare eventuali punti critici e studiarne la natura iii) Determinare l'equazione del piano tangente nel punto di coordinate $(1,-1,e^{-2})$ iv) Determinare il polinomio di MacLaurin di grado 3

9.7 Siano dati n numeri distinti $x_1, \ldots, x_n$ ed altri n numeri $y_1, \ldots, y_n$ (non necessariamente distinti). In generale non è possibile trovare una retta $f(x) = ax + b$ che passi per tutti i punti ossia tale che $f(x_i) = y_i$ per ogni i. Si può comunque trovare una retta che rende minimo "l'errore quadratico totale" $E(a, b) = \sum_i^n (f(x_i) - y_i)^2$. Interpretando E come funzione delle due variabili a e b determinare tali valori affinché ciò accada.

10.7 Sia data la funzione $f(\underline{x}) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Dimostrare che su ogni retta $y = mx$ la restrizione $f(x, mx)$ ha un minimo in $x = 0$ ma $(0, 0)$ ma non è un minimo per $f(x, y)$. Disegnare una figura che indichi l'insieme dei punti (x, y) in cui $f(\underline{x}) > 0$ e $f(\underline{x}) < 0$. Tale esempio è dovuto a G.Peano in un lavoro del 1884. Gli autori del libro E.Hairer, G.Warner *Analysis by its History* Springer Eds. 1995, a pag. 329 riportano che Peano scrisse quest'esempio per correggere un errore contenuto nel libro di Serret del 1868 (*Cours de calcul differentiel et integral*). Dicono anche, riportando opinioni di Peano stesso, che questa come altre correzioni del lavoro dei più grandi matematici francesi, dovuta ad uno "sconosciuto italiano di 25 anni", non fu felicemente accolta;

11.7 Determinare gli estremi relativi ed assoluti e i punti a sella della funzione $f(\underline{x})\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ nel quadrato $Q = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2\colon\ |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

12.7 Delle funzioni che seguono individuare e classificare i punti stazionari qualora vi siano

$f_1(\underline{x}) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$, $\quad f_2(\underline{x}) = x^3 + y^3 - 3x - 3xy$, $\quad f_3(\underline{x}) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$, $f_4(\underline{x}) = x - 2y + \log\sqrt{x^2 + y^2} + 3\arctan\frac{y}{x}$, $\ x > 0$, $\quad f_5(x) = x^2y^2 + y^4 + x^4 + y^5 + 27$

13.7 Sia data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} -2x^2 + 3xy - 2y^2 & \text{se } y - x \geq 0 \\ 2y^2 + 5x - 2x^2 & \text{se } y - x < 0 \end{cases}$

i)Discutere la continuità di f ii)Trovare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(-2, -1, f(-2, -1))$. iii) Esiste il piano tangente nel punto $(0, 0, 0,)$? iv) Discutere la convessità della funzione negli insiemi $A = \{(x, y)\colon\ y - x > 0\}$, $B = \{(x, y)\colon\ y - x < 0\}$

14.7 Sia data al funzione $f(x, y) = \begin{cases} x + y^3 & \text{se } x \leq y^3 \\ x^2 + y^6 & \text{se } x > y^3 \end{cases}$

i)Discutere la continuità, derivabilità, differenziabilità di f ii) Esiste il piano tangente nel punto $(0, 0, 0,)$? iii) Discutere la convessità della funzione negli insiemi $A = \{(x, y) |\, y^3 - x > 0\}$, $B = \{(x, y) |\, y^3 - x < 0\}$

15.7 Risolvere l'esercizio **2.1.4** nel caso di $n = 3$ con le tecniche usate in questa sezione e constatando come la soluzione sia certamente più immediata di quanto non sia la soluzione "induttiva"

16.7** Sia data una funzione di due variabili per la quale sono verificate le seguenti tre ipotesi: 1) $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_o} f(\underline{x}) = l$ (non è detto che $l = f(\underline{x}_o)$; l'uguaglianza si ha se è continua), 2) esiste $\lim_{x \to x_o} f(x, y)$ per $|y - y_o| < r$ per un qualche r positivo, 3) $\lim_{y \to y_o} f(x, y)$ per $|x - x_o| < r$.

Rispondere alle seguenti domande

i) Dimostrare che con le ipotesi 1) e 2) si ha $\lim_{y \to y_o} \lim_{x \to x_o} f(x, y) = l$ e che con le ipotesi 1) e 3) si ha $\lim_{x \to x_o} \lim_{y \to y_o} f(x, y) = l$

ii) Trovare un esempio di funzione per cui vale l'ipotesi 1) ma la tesi non sussiste (non verifica quindi almeno una delle ipotesi 2) oppure 3)).

iii) Dimostrare o confutare la tesi secondo cui se f è continua in $\underline{x}_o$ (e quindi $l = f(\underline{x}_o)$) allora l'ipotesi 1) è sufficiente per avere $\lim_{y\to y_o}\lim_{x\to x_o} f(x,y) = f(\underline{x}_o)$ e $\lim_{x\to x_o}\lim_{y\to y_o} f(x,y) = f(\underline{x}_o)$

Sulla stessa falsariga dare degli esempi di funzioni per cui
1) esistono due soli dei seguenti tre limiti:
$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$, $\quad\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$, $\quad\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$.
2) esiste uno solo dei precedenti tre limiti
3) esistono i limiti: $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$, e sono diversi
4) esiste $\lim_{x\to 0} f(\underline{x}) = g(y)$ uniformemente in y; esiste $\lim_{y\to 0} f(\underline{x}) = h(x)$ uniformemente in x; $\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{x\to 0} h(x)$ ma $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$ non esiste.

17.7 Sia data la funzione $f\colon B(\underline{0};r)\to\mathbf{R}$, $f(\underline{0}) = 0$, dove $B(\underline{0};r) = \{\underline{x}\in\mathbf{R}^n :\ \|\underline{x}\| < r\}$. Sia $A_{\alpha,\beta} = \{\underline{x}\in B(\underline{0};R) :\ x = \alpha t,\ y = \beta t,\ t\in\mathbf{R}\}$ $\alpha\in\mathbf{R}$, $\beta\in\mathbf{R}$ Sappiamo che $\forall\ A_{\alpha,\beta}\ \exists\ C_{\alpha,\beta} > 0 :\ \underline{x}\in C_{\alpha,\beta} \Rightarrow\ |f(\underline{x})| \le C_{\alpha,\beta}\|\underline{x}\|$. Si dimostri ovvero si dia un controesempio del fatto che la funzione è continua nell'origine. La condizione data si può riassumere dicendo che f è Lipschitziana su ogni segmento passante per l'origine e contenuto in $B(\underline{0};R)$

18.7 Si studi l'andamento del grafico della funzione $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ in relazione alla presenza di massimi, minimi, concavità e convessità .

19.7 Si consideri la funzione dell'esercizio **10.7** e si discuta concavità e convessità .

20.7 Si consideri la funzione dell'esercizio **11.7** e si discuta concavità e convessità .

21.7 Si consideri la funzione dell'esercizio **14.7** e si discuta il comportamento della funzione nei casi in cui almeno uno degli autovalori è nullo.

22.7 Si diano tre esempi di funzioni differenziabili tutte le volte che si vuole $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ e che soddisfino rispettivamente le condizioni
1) ha due massimi e nessun minimo.
2) ha due soli punti critici e sono entrambi selle
3) ha infiniti massimi e nessun minimo

23.7 Facendo riferimento al *Teorema 2.5 pag. 98* del libro "C.D.Pagani, S.Salsa: ANALISI MATEMATICA, Volume 2, Masson editore" che qui riportiamo

Teorema *Siano* $f, g\colon X\to\mathbf{R}$, $\overset{\circ}{X}\subset\mathbf{R}^n$ *di classe* C^2. *Se la forma quadratica* $\sum_{i,j=1}^n [f_{x_ix_j}(\underline{x}^o) - \lambda^o g_{x_ix_j}(\underline{x}^o)]h_ih_j = (\underline{h}, H(\underline{x}^o)\underline{h})$, *ristretta all'insieme dei vettori* $\underline{h}$ *tangenziali al vincolo in* $\underline{x}^o$ *ossia* $(\underline{\partial} g(\underline{x}^o), \underline{h}) = 0$ *è definita negativa (positiva) allora* $\underline{x}^o$ *è punto di massimo (minimo) forte vincolato.*
Si intende chiaramente che $\underline{x}^o$ è punto critico vincolato[(2.7)]

Si stabilisca la natura degli estremi presenti negli esercizi:
1) **3.8** pag.82 del libro: R.Ferretti, T.Isola, G.Tarantello: ANALISI MATEMATCA 2, Esercizi, ARACNE EDITRICE"

2) **18** pag.121 del libro S.Salsa, A.Squellati: ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 2, Parte Prima, Funzioni di più variabili e ottimizzazione Serie numeriche e di funzioni, editore Zanichelli.

24.7 Sulla curva di equazione $y = x^2$, $z = x^2$ nello spazio $\mathbf{R}^3$ trovare il punto $\underline{x}^o = (x^o, y^o, z^o)$ più vicino al punto $(0,0,1)$.

(2.7) L'origine di tale teorema risiede nella meccanica dei sistemi vincolati

25.7 In riferimento all'esercizio di pag. 96–97 del libro "C.D.Pagani, S.Salsa: ANALISI MATEMATICA, Volume 2, Masson editore" si dimostri che corrispondentemente all'autovalore μ_2 si ha una sella.

26.7 Si consideri l'esercizio **11.7** e si studino gli estremi sulla curva di equazione in coordinate polari $\rho = e^{-\theta}$ $\theta \geq 0$

27.7*** Si dimostri il `Teorema 7.7 del libro di testo`
Sia $f\colon A \to \mathbf{R}$ *convessa nell'insieme aperto e convesso* $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbf{R}^n$
i) f *è continua in* A *ed ammette derivate parziali destre e sinistre in* A
ii) se f *è derivabile è differenziabile*

28.7 Determinare il massimo ed il minimo della funzione $f(x,y) = xy$ dove (x,y) appartiene alla proiezione sul piano della curva data dall'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con il piano $x + y + z = 0$

29.7 Si determinino i punti appartenenti alle superfici di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e $x^2 + y^2 - z = 0$ per cui è massima e minima la somma delle coordinate del punto.

30.7 Stabilire la natura dei punti critici e studiare la concavità della funzione $f(x,y) = \frac{x^2}{2}(\frac{x^2}{2} - 1) + y^2 - y(x^2 - 1)$

31.7 È data la funzione di una variabile $f(x)$. Dimostrare che l'essere derivabile in x_o è equivalente ad una delle seguenti condizioni: 1) $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_o+h)-f(x_o-k)}{h+k} = f'(x)$, $h \geq 0$, $k \geq 0$ $h + k > 0$ 2) $\lim_{(\xi,\eta)\to(x,x)} \frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x)$, $\xi \leq x \leq \eta$ 3) $\lim_{(x,y)\to(x_o,x_o)} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} - \frac{f(y)-f(x_o)}{y-x_o} = 0$
Es: 4) Dimostrare oppure trovare un controesempio alla seguente affermazione: $f'(x_o^+)$ esiste se e solo se $\lim_{(\xi,\eta)\to(x_o,x_o)} \frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta} = f'(x_o^+)$, $\xi < \eta$ e esiste a positivo tale che $\frac{\eta-x_o}{\xi-x_o} \leq a$, $\frac{\eta-\xi}{\xi-x_o} \leq a$

32.7**** Si costruisca una funzione che dall'intervallo $[0,1]$ vada sul quadrato (funzione suriettiva) $[0,1] \times [0,1]$ *(curva di Peano).*

33.7* Si dimostri che la funzione dell'esercizio precedente, se è continua, non può essere iniettiva.

34.7*** Si trovi una funzione due volte differenziabile, definita su tutto $\mathbf{R}^2$, che *ha un solo punto critico*, è un massimo (oppure un minimo) relativo ma non è assoluto. Si tenga presente che per funzioni di una variabile definite su tutto **R**ciò è impossibile. [da: *J.Arias de Reyna; Ole Jorsboe A.M.M.* Vol.93, No.4 (Apr., 1986), 307. la cui soluzione proposta è la stessa contenuta in *B.Calvert, M.K.Vamanamurthy J. Austral. Math. Soc. (series A)* **29** (1980), 362–368. Altri esempi possono trovarsi in *D.Smith, J.Marshal Ash, H.Sexton, I.Rosenholt, L.Smylie, Mathematics Magazine* **58** (1985), 146–150]

Nella seconda referenza vi sono tre teoremi interessanti che cito senza dimostrazione
Teorema 1 *Se un polinomio cubico in due variabili ha un minimo locale (diciamo in* $\underline{x} = \underline{0}$*) allora il polinomio ha almeno un altro punto cricico.*
Teorema 2 *Se un polinomio quartico in due variabili ha un unico punto critico (diciamo in* $\underline{x} = \underline{0}$*), ed è minimo locale, allora il minimo è assoluto.*
Teorema 3 *Se un polinomio cubico in tre variabili ha un minimo locale (diciamo in* $\underline{x} = \underline{0}$*), allora il polinomio ha un altro punto critico.*

35.7** Si dia un esempio di funzione due volte derivabile in ($\underline{x} = \underline{0}$) (nel senso che esistono le due derivate prime e le derivate seconde calcolate nell'origine) $f(x, y)$ tale che: $\underline{\partial} f(\underline{0}) = \underline{0}$, la matrice hessiana è positiva ma l'origine non è un punto di minimo. [da: *Bu Qi–yue* A.M.M. Vol.95, No.7 (Aug. – Sep., 1988), 666–667; l'esercizio proposto nell'articolo ha una formulazione un pò diversa dalla precedente]

36.7** **Es:** Si dimostri il teorema:
Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione C^1 che ha un minimo locale, non globale (o assoluto) in un punto. Se $f^{-1}(K)$ è compatto non appena K è compatto, allora f deve avere almeno un altro punto critico.

37.7****** **Es:** Scrivere una funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differenziabile almeno due volte che abbia due soli punti critici, ambedue massimi [da: *A. Durfee, N.Kronenfeld, H.Munson, J.Roy, I.Westby* A.M.M. 100, No.3 (Mar., 1993), 255–271; le prossime due domande sono riprese dallo stesso articolo]
Es: Scrivere una funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differenziabile almeno due volte che abbia due soli punti critici, ambedue massimi e la funzione verifichi $f(x, y) = f(-x, y)$ oppure $f(x, y) = f(x, -y)$
Es: Scrivere una funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differenziabile almeno due volte che abbia solamente k punti critici, tutti massimi e $k > 2$.

SOLUZIONI

§7

1.7 - primo del gruppo - La funzione ottenuta come $f(x, y) = \sin(f_1(x, y) f_2(x, y))$ dove $f_1(x, y) = y$, $f_2(x, y) = x^2$, e quindi $Dom(f) = \mathbf{R}^2$. Inoltre essendo tutte le funzioni f_1, f_2, $\sin x$, continue nei rispettivi domini ne segue che la funzione f è continua.

1.7 - secondo del gruppo - $Dom(f) = \mathbf{R}^2 \backslash \{\underline{0}\}$. Anche in questo caso la funzione è continua nel suo dominio poiché è composizione della funzione continua $f(z) = \log z$ e della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ che a sua volta è somma di funzioni continue. Il punto $\underline{0} \notin Dom(f)$ ma $\underline{0} \in (Dom(f))'$ e quindi possiamo ivi definire il limite. Usando il fatto che $\forall\, M < 0$, $\exists\, \delta_M$ *t.c.* $0 < x < \delta_M \;\Rightarrow\; \log(x) < M$ si ha che per $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{\delta_M}$ si ha $\log(x^2 + y^2) < M$ e quindi $\lim_{\underline{x} \to \underline{0}} f(\underline{x}) = -\infty$

1.7 - terzo del gruppo - $Dom(f) = \mathbf{R}^2 \backslash \{\underline{x} \mid y \neq 0\}$; è continua sul suo dominio. Sia $\delta_\varepsilon^{(1)}$ tale che $|z| < \delta_\varepsilon^{(1)} \Rightarrow |\frac{e^z - 1}{z} - 1| < \varepsilon$
Se $\|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \min\{\frac{\varepsilon'}{\sqrt{2}} \frac{|y_o|}{2} e^{\frac{-2|x_o|}{|y_o|}} \Big((1 + \varepsilon)(1 + \frac{|x_o|}{|y_o|})\Big)^{-1}, \frac{|y_o|}{2\sqrt{2}} \delta_\varepsilon^{(1)} (1 + \frac{|x_o|}{|y_o|}), \frac{|y_o|}{2}\}$ allora $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_o)| < \varepsilon'$ da cui la continuità.

1.7 2) Il primo limite è vero; il secondo è falso.

2.7 $f_1(\underline{x})$: $Dom(f_1) = \mathbf{R}^2$, è differenziabile in $\mathbf{R}^2 \backslash \{\underline{0}\}$. Nell'origine non è continua; ammette derivate parziali ma non ammette derivata lungo una qualsiasi direzione diversa dagli assi coordinati.

2.7 $f_2(\underline{x})$: $Dom(f_2) = \mathbf{R}^2$; è differenziabile in $\mathbf{R}^2 \backslash \{\underline{0}\}$. È continua e derivabile nell'origine

2.7 $f_3(\underline{x})$: $Dom(f_3) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile su tutto il dominio.

2.7 $f_4(\underline{x})$: $Dom(f_4) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile su tutto il dominio tranne il punto $(0, 0)$

2.7 $f_5(\underline{x})$: $Dom(f_5) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile su $\mathbf{R}^2 \backslash \{\underline{0}\}$. In $\underline{x} = \underline{0}$ la funzione non è continua.

2.7 $f_6(\underline{x})$: $Dom(f_6) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile su $\mathbf{R}^2$ $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid |y| = x^2 \ \vee \ y = 0\}$. Se $y = \pm x^2 \ \vee \ y = 0$ non è continua. Va notato che ogni derivata direzionale calcolata in $\underline{0}$ è uguale a zero e quindi $\partial_{\underline{v}} f(\underline{0}) = \underline{\partial} f(\underline{0}) \cdot \underline{v} = 0$ benché la funzione non sia neppure continua nell'origine.

2.7 $f_7(\underline{x})$: $Dom(f_7) = \mathbf{R}^2$; la funzione è continua e derivabile su tutto il dominio. È differenziabile su $\mathbf{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$.

2.7 $f_8(\underline{x})$: $Dom(f_8) = \mathbf{R}^2$; se $\alpha < \frac{1}{2}$ la funzione è differenziabile. Se $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ la funzione è solo continua. Se $\alpha \le \frac{1}{2}$ la funzione è derivabile e se $\alpha \ge 1$ la funzione non è continua.

2.7 $f_9(\underline{x})$: $Dom(f_9) = \mathbf{R}^2$; In $\mathbf{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ la funzione è differenziabile. Se $\alpha < \frac{1}{4}$ è differenziabile anche nell'origine. Se $\alpha < \frac{1}{2}$ è continua ovunque. Se $\alpha \le \frac{3}{4}$ è derivabile ovunque.

2.7 Per quanto riguarda l'ultima parte abbiamo che il limite di f_1 non esiste in E_i per qualsiasi i mentre per f_2 il limite esiste per E_3 ed E_4.

3.7 La funzione ammette limite nei punti: $\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$ se $\alpha = 2p$, $p \in \mathbf{Z}$, $\underline{x} \in \mathbf{R}^2$ se $\alpha = 1$, $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0, x \neq 0\}$ se $\alpha = 2p+1$, $p \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0, x \neq 0\}$ se $\alpha = \frac{p}{q}$ $p\,q$ primi fra di loro $q \neq 1$, $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y \neq 0\}$ se $\alpha \in \mathbf{Q}$

4.7 $f_1(\underline{x})$: $Dom(f_1) = \mathbf{R}^2$, e la funzione è continua sull'insieme dei punti per i quali $y > 0 \ \vee \ (y = 0 \ \wedge \ x = 1) \ \vee \ y < 0$. $\partial_x f(\underline{x})$ esiste per ogni punto ma $\partial_y f(\underline{x})$ esiste solo se $\underline{x} \neq (\xi, 0)$ con $\xi \neq 1$. La funzione è differenziable in $\mathbf{R}^2 \setminus \{\underline{x} \mid y = 0\}$.

4.7 $f_2(\underline{x})$: $Dom(f_2) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile ovunque.

4.7 $f_3(\underline{x})$: $Dom(f_3) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile ovunque.

4.7 $f_4(\underline{x})$: $Dom(f_4) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile ovunque.

4.7 $f_5(\underline{x})$: $Dom(f_5) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{\underline{x} \mid y = x\}$

4.7 $f_6(\underline{x})$: $Dom(f_6) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile ovunque.

4.7 $f_7(\underline{x})$: $Dom(f_7) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{\underline{x} \mid x^2 + y^2 = 1\}$,

4.7 $f_8(\underline{x})$: $Dom(f_8) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{\underline{x} \mid x^2 + 3y^2 = 1\}$

4.7 $f_9(\underline{x})$: $Dom(f_9) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile in $\mathbf{R}^2 \setminus \{\underline{x} \mid y^2 = x^3\} \cup \{\underline{0}\}$

4.7 $f_{10}(\underline{x})$: $Dom(f_{10}) = \mathbf{R}^2$; la funzione è differenziabile ovunque

6.7 1) $\partial_{v_\alpha}(-1,2) = (5 + \tan\alpha)\cos\alpha$; il minimo lo si ha per $\alpha = \arctan(-\frac{5}{6})$; se $|\beta| \le 2\sqrt{2}$ la funzione ha la concavità diretta verso l'alto. Se $|\beta| > 2\sqrt{2}$ la concavità non è definita. 2) I punti $(0,0)$, $(0,\pm 1)$ sono delle selle mentre $(1,1)$ e $(-1,-1)$ sono dei massimi

2) Il punto $(0,0)$ è una sella mentre i punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$ sono dei massimi

7.7 i): $z = (2+\alpha)x + \beta y + 1 - \alpha - \beta$; ii): Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ allora la funzione è convessa ossia $f(\underline{x}) < ax + by + c$; per ogni $\underline{x}$ tale che $\|(x,y) - (1,1)\| \le \frac{1}{2}$. iii): $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $0 < \alpha + \beta < 1$.

8.7 ii) $(0,0)$ ed è una sella, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$ e sono altre due selle iv) $y = e^{-2} - (x-1)e^{-2}$

9.7 $b = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n y_i - a\sum_{i=1}^n x_i)$ e $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)^2}$.

11.7 I punti critici sono dati da $P = (0,0)$, $R_+ = (1,0)$, $R_- = (-1,0)$, $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P_2 = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$, $P_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$, $P_4 = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$. Dalla matrice hessiana viene fuori che P_1 e P_3 sono dei massimi relativi e $f(P_1) = f(P_3) = \frac{1}{8}$ mentre P_2 e P_4 sono dei minimi relativi e $f(P_2) = f(P_4) = -\frac{1}{8}$. $R_\pm$ e $Q_\pm$ sono selle. Essendo $f(1,1) = f(-1,-1) = -1 < -\frac{1}{8}$ sono punti di minimo assoluto mentre $f(1,-1) = f(-1,1,) = 1 > \frac{1}{8}$ e quindi sono massimi assoluti.

12.7 Per f_1 abbiamo l'unico punto critico dato da $(-\frac{11}{25}, -\frac{119}{25})$ ed è una sella. Per f_5 abbiamo i punti critici $(0,0)$ e $(0, -\frac{4}{5})$ e sono rispettivamente un minimo ed una sella.

13.7 i) $f(x,y)$ è continua in $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y \neq x\} \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}$, ii) $z = 5x - 2y + 4$, iii) Non esiste, iv) se $y > x$ la concavità è rivolta verso il basso, se $y < x$ il determinante della matrice hessiana è negativo e non è possibile individuare una concavità definita (tutti i punti sono di sella).

14.7 i) $f(x,y)$ è differenziabile ovunque tranne sulla curva $x = y^3$. È continua in $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y^3 \neq x\} \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}$. Non è derivabile in $(0,0)$ ed in $(1,1)$ ii) Il piano tangente in $(0,0)$ non è definito iii) se $x > y^3$ la concavità non stretta è rivolta verso l'alto. Se $x < y^3$ lo stesso la concavità non stretta è diretta verso l'alto per $y \geq 0$ mentre per $y \leq 0$ la concavità non stretta è diretta verso il basso.

Si veda a tal proposito l'esercizio **21.7**

16.7** Per la dimostrazione di i) si veda la risoluzione. Per quanto riguarda la ii) si consideri la funzione

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Essendo $|f| \leq |x|$ la funzione ammette limite nell'origine uguale a 0. La ipotesi 2) non è verificata in quanto $\lim_{y\to 0} f(\underline{x})$ esiste solo se $x = 0$ ed infatti $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(\underline{x}) = 0$ ma $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(\underline{x})$ non esiste.

Essendo inoltre nell'origine continua se ne deduce che la continuità in un solo punto non è sufficiente per dimostrare la proposizione. Quindi la stessa funzione funge da controesempio alla domanda iii). Quello che serve è la continuità in un intorno del punto. In altre parole se la funzione è continua in un intorno di (x_o, y_o) allora è vero che $\lim_{x\to x_o}\lim_{y\to y_o} f(x,y) = \lim_{y\to y_o}\lim_{x\to x_o} f(x,y) = \lim_{\underline{x}\to \underline{x}_o} f(x,y) = f(x_o, y_o)$.

Detta infatti $B(\underline{0}; r)$ la sfera aperta di raggio r intorno all'origine, sia $(x_o, 0) \in B(\underline{0}; r)$ un punto della sfera aperta. Essendo la funzione ivi continua si ha $\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f|_A(\underline{x}) = f(x_o, 0)$ dove $A = \{\underline{z} \in \mathbf{R}^2\colon\ z_1 = x_o, |z_2| \leq a \ \wedge\ \underline{z} \in B(\underline{0}; r)\}$. Essendo poi continua in $(0,0)$ si ha $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} f|_B(\underline{x}) = f(0,0)$ dove $B = \{\underline{z} \in \mathbf{R}^2 \mid z_2 = 0, |z_1| \leq b \ \wedge\ \underline{z} \in B(\underline{0}; r)\}$. A questo punto possiamo scrivere $f(\underline{x}) - f(\underline{0}) = (f(\underline{x}) - f(x_o, 0)) + (f(x_o, 0) - f(0,0))$ e ciascuno dei due addendi è piccolo per quanto scritto. Ne segue la tesi.

Per quanto riguarda il punto 1) le risposte sono date da :

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \qquad f(\underline{x}) = \begin{cases} y \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

Per quanto riguarda il punto 2) le risposte sono date da :

$$f(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}+x\sin\dfrac{1}{y} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}\qquad f(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}+y\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$f(\underline{x})=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}$$

Per il punto 3) e 4) la risposta è data rispettivamente da

$$f(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2} & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}\qquad f(\underline{x})=\begin{cases}1 & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$$

17.7 La funzione seguente, che può trovarsi sul `libro di testo`,
$f(\underline{x})=\begin{cases}\dfrac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ verifica le ipotesi ma non è continua nell'origine. Si veda a tal proposito l'esercizio **27.7**.

18.7 Gli unici punti critici sono $(0,0)$ (sella) e $(1,1)$ (massimo). Nell'insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \mid 4xy>1\ \wedge\ x>0\}$ la concavità è rivolta verso il basso. Nell'insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \mid 4xy>1\ \wedge\ x<0\}$ la concavità è rivolta verso l'alto. $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \mid 4xy<1\ \wedge\ x>0\}$ è costituito da punti che non hanno concavità definita.

22.7 1) $f(x,y)=(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2})e^{-y^2}$ ha tre punti critici. Due sono massimi ed uno è una sella, 2) $f(x,y)=\frac{x^2}{2}(\frac{x^2}{2}-1)+y(x^2-1)$ 3) $f(x,y)=(\frac{1}{2}x+\sin x)e^{-y^2}$

24.7 R.: $(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

26.7 Vi sono infiniti punti critici che soddisfano la equazione $\tan(2\theta)=\frac{1-e^{-2\theta}}{1-2e^{-2\theta}}$, $\rho=e^{-\theta}$, $\lambda=\sin(2\theta)\rho(1-2\rho^2)$

28.7 Massimi in $(0,\frac{\pm a}{\sqrt{2}})$ e minimi in $(\pm a,0)$

34.7** $f(x,y)=-x^6-x^4-y^2+2yx^2+2yx^3+x^5$ ha un massimo relativo in $(0,0)$ con $f(0,0)=0$, non ha altri punti critici ma non è sempre negativa o nulla.
La stessa cosa accade per la funzione $f(x,y)=x^5-x^4+x^3-x^2-y^2-2xy-2yx^2$ (3.7)

35.7** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}-\dfrac{3}{2}xy & \underline{x}\neq\underline{0}\\ 0 & \underline{x}=\underline{0}\end{cases}$ .Ovviamente la funzione non deve essere due volte differenziabile perché altrimenti il punto deve essere per forza di minimo. Si verifichi che $\underline{x}=(0,0)$ è un punto critico, la matrice hessiana ha autovalori positivi ma l'origine non è un minimo in quanto $f(x,x)=-\frac{1}{2}x^2$

37.7**

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

(3.7) *J.Arias de Reyna; Ole Jorsboe* A.M.M. Vol.93, No.4 (Apr., 1986), 307 e *B.Calvert, M.K.Vamanamurthy* *J. Austral. Math. Soc. (series A)* **29** (1980), 362–368 propongono la stessa funzione ossia $f(x,y)=x^2+y^2(1+x)^3$. Altri esempi possono trovarsi in *D.Smith, J.Marshal Ash, H.Sexton, I.Rosenholt, L.Smylie*, *Mathematics Magazine* **58** (1985), 146–150 e precisamente $f(x,y)=\frac{-1}{1+x^2}+(2y^2-y^4)(e^x+\frac{1}{1+x^2})$, $f(x,y)=e^{-y^2}(2x^3-3x^2+1)+e^{-y}(2x^3-3x^2)$ e ancora $f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$]

1.7 $\sin(x^2y)$ $\quad Dom(f)=\mathbf{R}^2$. Applichiamo la definizione $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ *t.c.* $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\delta_\varepsilon \Rightarrow |\sin(x^2y)-\sin(x_o^2y_o)|<\varepsilon$. $|\sin(x^2y)-\sin(x_o^2y_o)|\le|(x^2-x_o^2)y+x_o^2(y-y_o)|=|(x-x_o)(x+x_o)y+x_o^2(y-y_o)|$. Ora imponiamo $|x-x_o|\le 1$ e $|y-y_o|\le 1$ ottenendo $|\sin(x^2y)-\sin(x_o^2y_o)|\le(1+2|x_o|)(1+|y_o|)|x-x_o|+x_o^2|y-y_o|\le \max\{(1+2|x_o|)(1+|y_o|),x_o^2\}\sqrt{2}\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\varepsilon$ non appena $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\frac{\varepsilon}{\max\{(1+2|x_o|)(1+|y_o|),x_o^2\}\sqrt{2}}$ e quindi $\delta_\varepsilon=\min\{1,\frac{\varepsilon}{\max\{(1+2|x_o|)(1+|y_o|),x_o^2\}\sqrt{2}}\}$.
Si poteva stimare anche nel seguente modo $|\sin(x^2y)-\sin(x_o^2y_o)|\le(1+2|x_o|)(1+|y_o|)|x-x_o|+x_o^2|y-y_o|\le((1+2|x_o|)(1+|y_o|)+x_o^2)\sqrt{2}\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}<\varepsilon$ da cui $\delta'_\varepsilon=\min\{1,\frac{\varepsilon}{((1+2|x_o|)(1+|y_o|)+x_o^2)\sqrt{2}}\}$ che è non più grande del precedente.
In conclusione $\lim_{\underline{x}\to(x_o,y_o)}\sin(x^2y)=\sin(x_o^2y_o)$ e quindi la funzione è continua in $\mathbf{R}^2$.
In relazione all'esercizio successivo vale la pena sottolineare che le formule precedenti valgono qualsiasi sia x_o e y_o.
È forse utile dire due parole sulla risoluzione. La maggiorazione che definisce la continuità ossia $|f(\underline{x})-f(\underline{x}_o)|<\varepsilon$ è costituita dalle due disequazioni $f(\underline{x}_o)-\varepsilon<f(\underline{x})<f(\underline{x}_o)+\varepsilon$ ed in generale è impossibile, oltreché inutile, risoverle nella loro generalità. È impossibile poiché le disequazioni risolvibili sono poche così come le equazioni. È inutile in quanto ciò che interessa è la risoluzione delle disequazioni *in un intorno del punto* $\underline{x}_o$. Per questo motivo, a partire dalla formula $|f(\underline{x})-f(\underline{x}_o)|<\varepsilon$ si cerca di arrivare a scrivere $|f(\underline{x})-f(\underline{x}_o)|\le A(\underline{x}_o)\|\underline{x}-\underline{x}_o\|^\alpha<\varepsilon$ con $\alpha>0$. In tal modo si ottiene $\delta_\varepsilon=(\frac{\varepsilon}{A(\underline{x}_o)})^{\frac{1}{\alpha}}$. Un ulteriore problema che lo studente/ssa incontra risiede nel fatto che $|f(\underline{x})-f(\underline{x}_o)|$ *non è nella forma* $\tilde{f}(\|\underline{x}-\underline{x}_o\|)$ e bisogna quindi *manipolare* la funzione in modo tale da maggiorarla con qualcosa che abbia la dipendenza voluta. Se si guardano i passaggi precedenti si noterà che essi sono tesi proprio ad assolvere allo scopo. Tali maggiorazioni sono il più delle volte necessarie ma non sono *gratuite*. Infatti il prezzo che si paga si risolve in un δ_ε più piccolo di quello che si avrebbe se si riuscisse a risolvere esattamente le disequazioni $|f(\underline{x})-f(\underline{x}_o)|<\varepsilon$. A tal proposito ci viene in aiuto il fatto che *davanti a* δ_ε *vi è* $\exists$ e quindi ce ne basta uno (ancorché piccolo).

1.7 $\log(x^2+y^2)$ $Dom(f)=\mathbf{R}^2\setminus\{\underline{0}\}$. Cominciamo con il trovare il limite in un punto del dominio. Dobbiamo risolvere la disequazione $\log(x_o^2+y_o^2)-\varepsilon<\log(x^2+y^2)<\log(x_o^2+y_o^2)+\varepsilon$. Facendo l'esponenziale e sottraendo $x_o^2+y_o^2$ si ottiene $(x_o^2+y_o^2)(e^{-\varepsilon}-1)<(x^2-x_o^2)+(y^2-y_o^2)<(x_o^2+y_o^2)(e^{\varepsilon}-1)$ e quindi $(x^2-x_o^2)+(y^2-y_o^2)\le\min\{(x_o^2+y_o^2)(e^{-\varepsilon}-1),(x_o^2+y_o^2)(e^{\varepsilon}-1)\}=(x_o^2+y_o^2)(e^{-\varepsilon}-1)$. Ora poniamo $|x-x_o|<\frac{1}{2}|x_o|$ e $|y-y_o|<\frac{1}{2}|y_o|$ da cui $|(x^2-x_o^2)+(y^2-y_o^2)|\le|x-x_o||x+x_o|+|y-y_o||y+y_o|\le|x-x_o|\frac{3}{2}|x_o|+|y-y_o|\frac{3}{2}|y_o|\le \sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}\sqrt{2}\max\{\frac{3}{2}|x_o|,\frac{3}{2}|y_o|\}$ ed a questo punto imponiamo
$\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}\sqrt{2}\max\{\frac{3}{2}|x_o|,\frac{3}{2}|y_o|\}\le(x_o^2+y_o^2)(e^{-\varepsilon}-1)$ da cui discende
$\delta_\varepsilon=\min\{\frac{1}{2}(|x_o|+|y_o|),\frac{(x_o^2+y_o^2)(e^{-\varepsilon}-1)}{\sqrt{2}\max\{\frac{3}{2}|x_o|,\frac{3}{2}|y_o|\}}\}$
Si può notare come sia consentito che $x_o=0$ oppure $y_o=0$ ma non tutte e due. Il valore del limite nell'origine è stato studiato precedentemente.

1.7 Esaminiamo solo $\sin(e^{\frac{x}{y}})$. $Dom(f)=\mathbf{R}^2\setminus\{(x,y)\mid y=0\}$, $(Dom(f))'=\mathbf{R}^2$ e quindi ha senso esaminare il limite in tutti i punti del piano. Cominciamo dai punti che stanno sull'asse delle ascisse. Su tali punti il limite non esiste. Sia infatti $x_o\neq 0$ (ad esempio $x_o>0$) e consideriamo le successioni $\underline{x}_n\doteq(x_o,y_n)$ con $y_n\nearrow 0$ e $\underline{x}'_n\doteq(x_o,y'_n)$ con $y'_n\searrow 0$. Si ha $\lim_{n\to+\infty}\sin(e^{\frac{x_o}{y'_n}})=0$ essendo $\lim_{n\to+\infty}(e^{\frac{x_o}{y'_n}})=0$. Del resto si ha pure $\lim_{n\to+\infty}(e^{\frac{x_o}{y_n}})=+\infty$ e quindi il limite non esiste a causa del `Teorema ponte`. Dunque nei punti $(x_o,0)$ il limite non esiste e la stessa cosa accade nei punti con $x_o<0$. Se $x_o=0$ allora consideriamo la successione (x_n,mx_n) con $x_n\to 0$. Quello che si ottiene è $f(x_n,mx_n)=\sin e^{\frac{1}{m}}$ e quindi il limite dipenderebbe dalla successione considerata che è come affermare la sua non esistenza.

Sia ora $p=(x_o,y_o)$ con $y_o\neq 0$ un punto del dominio. Dobbiamo dimostrare che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ *t.c.* $\sqrt{(x_1-(x_o)_1)^2+(y_1-(y_o)_1)^2}<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\underline{x})-f(\underline{x}_o)|<\varepsilon$ e quindi bisogna studiare la disequazione $|\sin e^{\frac{x}{y}}-\sin e^{\frac{x_o}{y_o}}|<\varepsilon$. Usando la ovvia identità: $|\sin e^{\frac{x}{y}}-\sin e^{\frac{x_o}{y_o}}|=|(\sin e^{\frac{x}{y}}-\sin e^{\frac{x_o}{y}})+(\sin e^{\frac{x_o}{y}}-\sin e^{\frac{x_o}{y_o}})|$ ed essendo $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$, maggioriamo con $|e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{x_o}{y}}|+|e^{\frac{x_o}{y}}-e^{\frac{x_o}{y_o}}|$ che può essere riscritta come $|e^{\frac{x_o}{y}}(1-e^{\frac{x-x_o}{y}})|+|e^{\frac{x_o}{y_o}}(1-e^{\frac{x_o}{y}-\frac{x_o}{y_o}})|=|e^{\frac{x_o}{y}}(1-e^{\frac{x-x_o}{y}})|+|e^{\frac{x_o}{y_o}}(1-e^{\frac{x_o(y_o-y)}{yy_o}})|$. È evidente che ciascuna delle precedenti espressioni tende a zero per $x\to x_o$ e $y\to y_o$. Per stimare δ_ε bisogna fare del lavoro ulteriore. Imponiamo $\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}\leq\frac{|y_o|}{2}$ (perché è importante porre la limitazione $\frac{1}{2}|y_o|$?). In tal modo si ha $\frac{|y_o|}{2}=|y_o|-\frac{|y_o|}{2}\leq|y|\leq|y_o|+\frac{|y_o|}{2}=\frac{3}{2}|y_o|$. Si ottiene subito $|e^{\frac{x_o}{y}}(1-e^{\frac{x-x_o}{y}})|\leq e^{2\frac{|x_o|}{|y_o|}}|(1-e^{\frac{x-x_o}{y}})|$. Ora usiamo il fatto che $-\varepsilon+1<\frac{e^z-1}{z}<\varepsilon+1$ per $|z|<\delta_\varepsilon^{(1)}$. L'espressione $|e^{\frac{x_o}{y}}(1-e^{\frac{x-x_o}{y}})|$ può dunque maggiorarsi con $e^{2\frac{|x_o|}{|y_o|}}2(1+\varepsilon)\frac{|x-x_o|}{|y_o|}$ per $2\frac{|x-x_o|}{|y_o|}\leq\delta_\varepsilon^{(1)}$ ossia $|x-x_o|\leq\frac{|y_o|}{2}\delta_\varepsilon^{(1)}$. Il secondo contributo $|e^{\frac{x_o}{y_o}}(1-e^{\frac{x_o(y_o-y)}{yy_o}})|$ si stima con $e^{\frac{|x_o|}{|y_o|}}2(1+\varepsilon)\frac{|x_o|}{|y_o|}\frac{|y-y_o|}{|y_o|}$ per $2\frac{|x_o|}{|y_o|^2}|y-y_o|\leq\delta_\varepsilon^{(1)}$. Ora mettiamo assieme i due contributi ottenendo la seguente stima superiore $e^{2\frac{|x_o|}{|y_o|}}2(1+\varepsilon)\frac{|x-x_o|}{|y_o|}+e^{\frac{|x_o|}{|y_o|}}2(1+\varepsilon)\frac{|x_o|}{|y_o|}|y-y_o|^2=2(1+\varepsilon)\frac{|x-x_o|+|y-y_o|}{|y_o|}(e^{2\frac{|x_o|}{|y_o|}}+\frac{|x_o|}{|y_o|}e^{\frac{|x_o|}{|y_o|}})\leq 2(1+\varepsilon)\frac{|x-x_o|+|y-y_o|}{|y_o|}e^{2\frac{|x_o|}{|y_o|}}(1+\frac{|x_o|}{|y_o|})$ se $|x-x_o|<\frac{|y_o|}{2}\delta_\varepsilon^{(1)}$ e $2\frac{|x_o|}{|y_o|^2}|y-y_o|<\delta_\varepsilon^{(1)}$. Dunque se $\|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\min\{\frac{\varepsilon'}{\sqrt{2}}\frac{|y_o|}{2}e^{-2\frac{|x_o|}{|y_o|}}\Big((1+\varepsilon)(1+\frac{|x_o|}{|y_o|})\Big)^{-1},\frac{|y_o|}{2\sqrt{2}}\delta_\varepsilon^{(1)}(1+\frac{|x_o|}{|y_o|}),\frac{|y_o|}{2}\}$ allora $|f(\underline{x})-f(\underline{x}_o)|<\varepsilon'$ da cui la continuità [(4.7)]. Appare evidente che $y_o=0$ è escluso da tale contesto.

1.7 2) Applichiamo la `definizione 7.2`. In questo caso $l\in\mathbf{R}^*\backslash\mathbf{R}$, $\mathcal{V}_M=\{z\in\mathbf{R}\ \mid z>M, M>0\}$, $\mathcal{U}_r=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\ \mid \|\underline{x}\|>r, r>0\}$, $X=E$.
Dobbiamo dimostrare che $\forall\ M>0\ \exists\ r>0\ |\ \underline{x}\in\mathcal{U}_r\cap E\ \Rightarrow\ x^2y\in\mathcal{V}_M$. Essendo $x^2y>axy$ basta che $x>\max\{\sqrt{\frac{M}{2a}},a\}\doteq r(a,M)$ $y>\max\{\sqrt{\frac{M}{2a}},a\}\doteq r(a,M)$ da cui $r=r(a,M)$.
Si può notare come $r(a,M)\to+\infty$ per $a\to 0$ per ogni valore di M. Questo fatto ci dice che il secondo limite è falso. Infatti se $x=0$ oppure $y=0$ la funzione è identicamente nulla e quindi non può esistere un valore r tale che $\mathcal{U}_r\cap E\ \Rightarrow\ x^2y\in\mathcal{V}_M$ in quanto in $\mathcal{U}_r\cap E$ vi sarebbero punti la cui ascissa od ordinata è così piccola da rendere x^2y arbitrariamente piccola. In altre parole è vera la proposizione per cui $\exists\ M>0\ |\ \forall\ r>0\ \exists(x_o,y_o)\in\mathcal{U}_r\cap E\ |\ x_o^2y_o\leq M$. Infatti $(x_o,y_o)\in\mathcal{U}_r\cap E$ implica che $x_o\geq\frac{r}{\sqrt{2}}$ oppure $y_o\geq\frac{r}{\sqrt{2}}$ oppure tutti e due. Supponiamo che x_o soddisfi la relazione. Se prendiamo $y_o\leq\frac{M}{x_o^2}$ otteniamo che $x_o^2y_o\leq M$ e quindi il limite non esiste.

2.7 – Parte prima – $f_1(\underline{x})$: La funzione è discontinua nell'origine a causa del `Teorema 7.1`. Infatti se indichiamo con $A\equiv\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2\ \mid y=mx, x\in\mathbf{R}\}$ si ha $\underline{0}\in A'$ e quindi per essere continua deve aversi $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}}f\,|_A(\underline{x})=0$. Essendo però (da dimostrare) $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}}f\,|_A(\underline{x})=\lim_{x\to 0}f(x,mx)$ e $\lim_{x\to 0}f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2}\neq 0$ se $m\neq 0$ ne consegue che la funzione non è continua nell'origine.

Dimostriamo ora che $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}}f\,|_A(\underline{x})=\lim_{x\to 0}f(x,mx)$.
Supponiamo che esista $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}}f\,|_A(\underline{x})=l$ ($l\in\mathbf{R}$). Ciò vuol dire che $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon$ *t.c.* $0<\|\underline{x}\|<\delta_\varepsilon\ \wedge\ \underline{x}\in A\Rightarrow\ |f(\underline{x})-l|<\varepsilon$. Considerando ora chi è l'insieme A, essa diventa $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon$ *t.c.* $0<\sqrt{1+m^2}|x|<\delta_\varepsilon\Rightarrow\ |f(x,mx)-l|<\varepsilon$.

L'affermazione $\lim_{x\to 0}f(x,mx)=l$ per definizione è $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \overline{\delta}_\varepsilon$ *t.c.* $0<|x|<\overline{\delta}_\varepsilon\Rightarrow\ |f(x,mx)-l|<\varepsilon$. Se dunque si prende $\overline{\delta}_\varepsilon=\frac{\delta_\varepsilon}{\sqrt{1+m^2}}$ si ottiene che la esistenza di $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}}f\,|_A(\underline{x})=l$ implica

[(4.7)] La cosa migliore da fare per lo studente/ssa consiste nel rifarsi i calcoli in proprio e poi eventualmente confrontare con quanto scritto sopra.

$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = l$.
Supponiamo ora che $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = l$ e ad ε corrisponda δ_ε. Ebbene il valore $\delta_\varepsilon\sqrt{1+m^2}$ è il valore corrispondente ad ε che si trova impostando $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} f\,|_A(\underline{x}) = l$.

Negli altri punti è continua in quanto è il rapporto di due polinomi ed il denominatore non si annulla mai. Naturalmente ciò non costituisce una dimostrazione ma bisogna impostare il seguente conto: $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta_\varepsilon\ t.c.\ \|\underline{x}-\underline{x}_o\| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_o)| < \varepsilon$. Sia $\underline{x}_o = (x_o, y_o) \neq (0,0)$; la disequazione da risolvere per $\|x - x_o\| < \delta_\varepsilon$ è data da $|\frac{xyx_o^2+xyy_o^2-x^2x_oy_o-y^2x_oy_o}{(x^2+y^2)(x_o^2+y_o^2)}| < \varepsilon$. Per questo riscriviamo il tutto come $\frac{(xy_o-yx_o)(yy_o-xx_o)}{(x^2+y^2)(x_o^2+y_o^2)} = \frac{((x-x_o)y_o+x_o(y_o-y))(yy_o-xx_o)}{(x^2+y^2)(x_o^2+y_o^2)}$. Essendo $(x_o,y_o) \neq (0,0)$ si può porre $\|\underline{x}-\underline{x}_o\| \le \frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|$ e quindi $\frac{3}{2}\|\underline{x}_o\| \ge \|\underline{x}\| \ge \frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|$. Di qui si passa a $|yy_o - xx_o| \le \max\{|y_o|,|x_o|\}\sqrt{2}\|\underline{x}\| \le \max\{|y_o|,|x_o|\}\sqrt{2}(\|\underline{x}_o\| + \frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|) = \max\{|y_o|,|x_o|\}\sqrt{2}\frac{3}{2}\|\underline{x}_o\| \le \sqrt{2}\frac{3}{2}\|\underline{x}_o\|^2$ (si è usato $\max\{|x_o|,|y_o|\} \le \|\underline{x}_o\|$). Inoltre $|(x-x_o)y_o + x_o(y_o-y)| \le \max\{|y_o|,|x_o|\}\sqrt{2}\|\underline{x}-\underline{x}_o\| \le \sqrt{2}\|\underline{x}_o\|\|\underline{x}-\underline{x}_o\|$. Riunendo tutte le stime si può dire scrivere $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_o)| \le \frac{\|\underline{x}_o\|\sqrt{2}\frac{3}{2}\|x_o\|)\sqrt{2}\|\underline{x}_o\|\|\underline{x}-\underline{x}_o\|}{\|\underline{x}_o\|^2\frac{1}{4}\|\underline{x}_o\|^2} = 12\frac{\|\underline{x}-\underline{x}_o\|}{\|\underline{x}_o\|}$ da cui $\delta_\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|, \frac{\varepsilon\|x_o\|}{12}\}$ (anche qui si vede come essenziale sia stabilire che $\underline{x} \neq \underline{0}$.)

$$\partial_x f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \underline{x} \neq 0 \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases} \qquad \partial_y f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \underline{x} \neq 0 \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

$D_{\underline{v}}(\underline{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(t^2 v_1 v_2) = \lim_{t\to 0} \frac{v_1v_2}{t}$ ed il limite non esiste se $v_1 \cdot v_2 \neq 0$

Verifichiamo che la funzione non è differenziabile nell'origine. $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{0}+\underline{h}) - f(\underline{0}) - \underline{\partial} f(\underline{0})\cdot\underline{h}) = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|h\|} f(\underline{h}) = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} \neq 0$ (basta prendere la direzione $h_1 = h_2$; notare che lungo uno qualsiasi degli assi il limite non è nullo).

La funzione ammette infiniti punti critici e precisamente l'insieme dei punti $\{\underline{x} \mid y = \pm x\}$. Su tali punti la funzione vale $\frac{1}{2}$.
$\partial_{xx} f(\underline{x}) = \frac{-6xy^3+2x^3y}{(x^2+y^2)^3}$, $\partial_{yy} f(\underline{x}) = \frac{-6x^3y+2y^3x}{(y^2+x^2)^3}$, $\partial_{xy} f(\underline{x}) = -\frac{(x^4+y^4-6x^2y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ ovviamente le derivate seconde valgono per $\underline{x} \neq \underline{0}$. È evidente che la matrice hessiana ha determinante nullo per $y = \pm x$ (perché?)
A tal proposito va detto che se una funzione è solo derivabile in un punto (ad esempio l'origine) ma non differenziabile, si può certamente definire la quantità $f(0) + \underline{\partial} f(\underline{0})\cdot\underline{h}$. *Ciò non vuol dire che esiste il piano tangente in quanto non è verificata la relazione* $\lim_{\|\underline{h}\|\to 0} \frac{f(\underline{h})-f(0)-\partial f(0)\cdot h}{\|h\|} = 0$.
È questa una delle differenze maggiori rispetto alle funzioni di una variabile perché in quel caso l'esistenza della derivata implica che $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)-f'(x_o)h}{h} = 0$

2.7 $f_2(\underline{x})$: $\quad Dom(f) = \mathbf{R}^2$, Per quanto riguarda la continuità fuori dall'origine si possono rifare esattamente i calcoli di prima ed ottenere $\delta_\varepsilon = \min\{\frac{3\varepsilon}{15+5\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|\}$. Si tratta di risolvere infatti la disequazione $|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x_oy_o}{\sqrt{x_o^2+y_o^2}}| < \varepsilon$ per $\|x - \underline{x}_o\| < \delta_\varepsilon$. Si ottiene (modulo a parte)

$$\frac{(x-x_o)y + (y-y_o)x_o}{\sqrt{x^2+y^2}} + x_oy_o\frac{\sqrt{x_o^2+y_o^2} - \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x_o^2+y_o^2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x-x_o)y + (y-y_o)x_o}{\sqrt{x^2+y^2}} +$$

$$+ x_oy_o\frac{x_o^2+y_o^2-x^2-y^2}{(\sqrt{x_o^2+y_o^2}+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x_o^2+y_o^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

e prendendo $\|\underline{x}-\underline{x}_o\| < \frac{1}{2}\|x_o\|$ si può maggiorare il primo addendo con $\frac{|x-x_o|\frac{3}{2}\|\underline{x}_o\|+\|\underline{x}_o\||y-y_o|}{\frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|} \le \frac{\frac{3}{2}\|\underline{x}_o\|\sqrt{2}\|\underline{x}-\underline{x}_o\|}{\frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|} \le 3\sqrt{2}\|\underline{x}-\underline{x}_o\|$ mentre il secondo si maggiora con

$\frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|^2\frac{|x-x_o|(|x_o|+\frac{3}{2}\|\underline{x}_o\|)+|y-y_o|(|y_o|+\frac{3}{2}\|\underline{y}_o\|)}{\frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|\|\underline{x}_o\|(\|\underline{x}_o\|+\frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|)} \le \frac{\|\underline{x}_o\|^3\|\underline{x}-\underline{x}_o\|\frac{5}{2}\sqrt{2}}{\frac{3}{2}\|\underline{x}_o\|^3} = \frac{20}{3}\|\underline{x}-\underline{x}_o\|$.
Sommando i due addendi si ottiene $|f_2(\underline{x})-f_2(\underline{x}_o)| \le (5+\frac{5}{3}\sqrt{2})\|\underline{x}-\underline{x}_o\|$ da cui $\delta_\varepsilon = \min\{\frac{3\varepsilon}{15+5\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\|\underline{x}_o\|\}$.

Per la continuità nell'origine basta porre $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ per convincersi che la funzione è continua anche nell'origine.

La funzione è ovunque derivabile fuori dall'origine. La derivata direzionale nell' origine vale $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f_2(tv_1,tv_2) = \frac{1}{t}\frac{t^2v_1v_2}{|t|\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$ e quindi il limite non esiste valendo $\frac{|t|}{t}\frac{v_1v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$. Il limite esiste solamente se $v_1v_2=0$ ossia quando la derivata direzionale è in realtà parziale da cui $\underline{\partial} f_2(\underline{0}) = \underline{0}$. Nell'origine non è diffenziabile in quanto $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ non è nullo se $h_1=h_2$.

2.7 $f_3(\underline{x})$: Per la continuità in $\underline{x}\neq\underline{0}$ si può dire che la funzione è il quoziente di due polinomi ed il denominatore è non nullo dunque è continua. Nell'origine pure è continua in virtù della disuguaglianza $x^2+y^4\ge x^2$ da cui segue che $|f(x)| \le y^2 \le \|\underline{x}\|^2 \le \varepsilon$ per $\|\underline{x}\| \le \sqrt{\varepsilon}$.

$$\partial_x f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2} & \underline{x}\neq\underline{0} \\ 0 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases} \qquad \partial_y f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2} & \underline{x}\neq\underline{0} \\ 0 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases}$$

Infatti nell'origine le derivate sono $\partial_x f(\underline{0}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(t,0,)-f(0,0)) = 0$ e $\partial_y f(\underline{0}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(0,t,)-f(0,0)) = 0$.
Per quanto riguarda la differenziabilità nell'origine bisogna vedere se è nullo il limite $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(h_1,h_2)-f(\underline{0})-\underline{\partial} f(\underline{0})\cdot\underline{h})) = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^4}$. Stante la maggiorazione usata prima si ha $\frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |y|$ ossia $\frac{1}{\|\underline{h}\|}\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^4} \le |h_2|$ e quindi la funzione è differenziabile in $\underline{x}=\underline{0}$. La dimostrazione che negli altri punti pure è differenziabile oppure no è più complicata per via del fatto che in generale le derivate parziali non sono nulle. Si può ricorrere al `Teorema 7.3` e quindi bisogna dimostrare che le derivate parziali sono continue per $\underline{x}\neq\underline{0}$. Che ciò è vero lo si evince usando lo stesso argomento che ha condotto a dire che la funzione era continua in qualsiasi punto che non fosse l'origine. È interessante verificare se le derivate parziali sono continue anche nell'origine. Gli indizi che abbiamo (la differenziabilità nell'origine) ci dicono che $\partial_x f(\underline{x})$ e $\partial_y f(\underline{y})$ *potrebbero* essere continue per $\underline{x}=\underline{0}$. Cominciamo dalla derivata rispetto ad y. Dobbiamo far vedere se $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta_\varepsilon$ *t.c.* $\|\underline{x}\| \le \delta_\varepsilon \Rightarrow |\partial_y f(\underline{x}) - \partial_y f(\underline{0})| < \varepsilon$ e quindi dobbiamo risolvere la disequazione $|\frac{2x^2y(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}| < \varepsilon$. Essendo $x^2-y^4 < x^2+y^4$ si ottiene $|\partial_y f(\underline{x})| \le 2|\frac{x^2y}{x^2+y^4}| \le |y| \le \|\underline{x}\|$ e quindi è continua nell'origine. Passando alla derivata parziale rispetto ad x si deve risolvere la disequazione $2\frac{|x|y^6}{(x^2+y^4)^2} < \varepsilon$. Considerando ora il limite lungo la curva $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \mid y = ax^{1/2}\}$ si ottiene $\lim_{x\to 0}\frac{2a^6x^4}{x^4(1+a^4)}$ che dipendere dal valore di a e quindi il limite non esiste concludendo che $\partial_x f(\underline{x})$ non è continua nell'origine.

2.7 $f_4(\underline{x})$: *Dom*$(f) = \mathbf{R}^2$; È differenziabile in $\mathbf{R}\backslash\{\underline{0}\}$; basta usare gli argomenti degli esercizi precedenti.
Per la continuità nell'origine usiamo la solita formula $|xy^2| \le \frac{1}{2}(x^2+y^4)$ da cui segue che $|f(\underline{x})| \le |y| \le \|\underline{x}\|$ e quindi $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Pensare di far discendere la continuità dal solo fatto che $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{m^2x^2}{1+m^4x^2} = 0$ *per ogni m fissato* è sbagliato. Quello che bisogna ancora dimostrare è la uniformità in m del limite. Il calcolo che segue esemplifica il concetto. Vogliamo dimostrare la seguente

Proposizione *La funzione è continua nell'origine se e solo se, detta r una qualsiasi retta passante per l'origine, si ha* $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} f|_r(\underline{x}) = 0$ *uniformemente in r*

La notazione $f|_r(\underline{x})$ vuol dire come al solito la restrizione di f all'insieme r

Dimostrazione

$\Rightarrow$: supponiamo quindi che la funzione è continua nell'origine e sia δ_ε sia l'intorno che entra nella definizione di continuità. Si badi bene che δ_ε dipende chiaramente solo da ε (oltreché dal punto in cui si sta esaminando la continuità ma quest'ultima dipendenza non ci interessa in quanto attiene alla uniforme continuità che non è oggetto di attenzione ora). Cominciamo a considerare come retta r l'asse delle ordinate. In tal caso abbiamo $f|_r(\underline{x}) \equiv 0$ e quindi δ_ε può essere qualsiasi numero positivo.

Consideriamo ora una retta di equazione $y = mx$.

Ebbene dal `Teorema 7.1` e dalla particolare forma dell'insieme r segue che qualunque sia il valore di m, purché sia $\sqrt{x^2 + m^2x^2} < \delta_\varepsilon$, si ha $|f_4(x, mx)| < \varepsilon$ e δ_ε è il numero che entra nella definizione di continuità (vedi l'esercizio f_1 di **2.7**. Poiché tale numero è certamente indipendente da m si ha l'uniformità in m.

$\Leftarrow$: Ora come ipotesi abbiamo che il limite è uniforme su tutte le rette passanti per il punto. Procediamo per assurdo supponendo che la funzione non sia continua. Supponiamo quindi che $\exists\ \varepsilon > 0\ \ |\ \forall\ \delta > 0\ \exists\ \underline{x}_\delta\ |\ \|\underline{x}_\delta\| < \delta\ \wedge\ |f_4(\underline{x}_\delta)| \geq \varepsilon$.

A questo punto consideriamo una successione di valori $\{\delta_k\} = \{\frac{1}{k}\}$ $k = 1, 2, 3, \ldots$, e per ogni valore di k individuiamo il punto $\underline{x}_{\frac{1}{k}} = (x_{\frac{1}{k}}, y_{\frac{1}{k}})$ come dalla definizione precedente. Ogni punto $\underline{x}_{\frac{1}{k}}$ individua una retta passante per l'origine e per il punto $\underline{x}_{\frac{1}{k}}$ stesso con un coefficiente angolare m_k dato da $\frac{y_k}{x_k}$ (per $x_{\frac{1}{k}} = 0$ il cioefficiente vale $\pm\infty$). Il fatto che $\frac{1}{k} \to 0$ per $k \to +\infty$ vuol dire che esiste una successione di coefficienti angolari $\{m_k\} = \{\frac{y_k}{x_k}\}$ rispetto alla quale $\delta_\varepsilon(m_k) = \frac{1}{k}$ tende a zero e quindi non si avrebbe uniformità rispetto al coefficiente angolare contrariamente all'ipotesi. Non si ha uniformità nel senso che $\inf_{k\in\mathbf{N}} \delta_\varepsilon(m_k) = 0$.

Vogliamo mostrare ora che nel caso della funzione f_4 si ha la uniformità rispetto al coefficiente angolare del limite per $x \to 0$.

Dire che $\lim_{x\to 0} f_4(x, mx) = 0$ significa dire che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon(m)\ |\ |x| < \delta_\varepsilon(m)\ \Rightarrow\ \frac{|m^2x^2|}{|1+m^4x^2|} < \varepsilon$ e *notare* che necessariamente δ dipende, oltreché da ε, *anche* da m. *Il problema che ci si pone adesso è di cercare l'estremo inferiore di* $\delta_\varepsilon(m)$ *al variare di* m *nei reali.* Se tale estremo inferiore è un numero positivo allora si ha uniformità nel coefficiente angolare m e quindi la continuità della funzione. La disequazione diventa $\frac{|m^3|x^2}{1+m^4x^2} < \varepsilon$ ossia $m^3x^2 < \varepsilon(1 + m^4x^2)$ se $m \geq 0$ e quindi $m^3x^2(1 - \varepsilon m) < \varepsilon$. Se $m = 0$ qualsiasi valore di x va bene e quindi $\delta_\varepsilon = +\infty$. Se $m > 0\ \wedge\ 1 - \varepsilon m < 0$ ossia $m > \frac{1}{\varepsilon}$, vale ancora $\delta_\varepsilon = +\infty$. Se $0 < m < \frac{1}{\varepsilon}$ allora si ha $|x| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{m^{3/2}\sqrt{1-\varepsilon m}} \doteq \delta_\varepsilon(m)$.

La cosa importante da notare ora è che $\inf_{0<m<\frac{1}{\varepsilon}} \delta_\varepsilon(m) = \varepsilon^2 > 0$ e quindi abbiamo ottenuto un valore buono *per ogni valore di* m.

Se $m < 0$ la disequazione da risolvere è data da $-m^3x^2(1 + \varepsilon m) < 0$. Se $1 + \varepsilon m > 0$ ossia $m < -\frac{1}{\varepsilon}$ allora $\delta_\varepsilon = +\infty$. Se invece $-\frac{1}{\varepsilon} < m < 0$ allora si ha $|x| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{(-m)^{3/2}\sqrt{1+\varepsilon m}} \doteq \delta_\varepsilon(m)$ ed inoltre $\inf_{-\frac{1}{\varepsilon}<m<0} \delta_\varepsilon(m) = \varepsilon^2 > 0$. Alla fine abbiamo ottenuto che $\delta_\varepsilon(m) = \varepsilon^2$ per ogni valore di m per cui della funzione è dimostrata la continuità nell'origine anche per quest'altra strada. La funzione f_5 rappresenta un caso opposto ossia i calcoli analoghi ai precedenti portano ad avere l'estremo inferiore cercato prima nullo.

Se si usassero le coordinate polari si dovrebbe dimostrare $\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin^3\theta}{\cos^2\theta + \rho^2 \sin^4\theta} = 0$ per avere continuità. *Non è lecito dire che* $\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin^3\theta}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos\theta\sin^3\theta}{\cos^2\theta}$ *e che* $\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos\theta\sin^3\theta}{\cos^2\theta} = 0$ *in quanto al numeratore vi è una potenza positiva di* ρ. *Infatti* $\rho^2\sin^4\theta$ *tende a zero rispetto a* $\cos^2\theta$ *solo se* $\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (si veda l'esercizio **4.7** f_5 e **17.7**)

Passiamo ora alla derivabilità parziale. La funzione è ovunque derivabile sul suo dominio.

Nell'origine le derivate sono $\partial_x f(\underline{0}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(t,0)-f(0,0)) = 0$ e
$\partial_y f(\underline{0}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(0,t)-f(0,0)) = 0$.
$\partial_x f(\underline{x}) = \frac{y^3}{x^2+y^4} - \frac{2x^2y^3}{(x^2+y^4)^2} = \frac{y^7-x^2y^3}{(x^2+y^4)^2}$ $\quad \partial_y f(\underline{x}) = \frac{3y^2x}{x^2+y^4} - \frac{4xy^6}{(x^2+y^4)^2} = \frac{3y^2x^3-xy^6}{(x^2+y^4)^2}$.
$\lim_{x\to 0}\partial_y f(x,\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \neq 0$ e $\lim_{x\to 0}\partial_x f(x, a\sqrt{x}) \neq 0$ per $a\neq 1$ per cui le derivate parziali non sono continue in $(0,0)$.
Per quanto riguarda la differenziabilità nell'origine abbiamo $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(h_1,h_2)-f(\underline{0})-\underline{\partial} f(\underline{0})\cdot \underline{h})) = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\|\underline{h}\|}\frac{h_1h_2^3}{h_1^2+h_2^4}$ e lungo la curva $h_2=\sqrt{h_1}$ il limite non esiste (che le derivate parziali non potessero essere entrambe continue in $(0,0)$ era già evidente)

2.7 $f_5(\underline{x})$: $Dom(f) = \mathbf{R}^2$; È continua ovunque fuorché nell'origine in quanto $\lim_{x\to 0} f(x,\sqrt{x}) = \frac{1}{2}$. Altrove è differenziabile. È opportuno osservare che $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{mx}{1+m^2x^2} = 0$ per ogni m in altre parole il limite nell'origine è zero lungo *qualsiasi* retta passante per l'origine chiaramente. Facciamo vedere ora che sulle rette tale limite è si zero *ma non uniformemente rispetto al coefficiente angolare m della retta.* Dire che tale limite è uniforme rispetto ad m significa che $\forall\,\varepsilon\ \exists\,\delta_\varepsilon$ *t.c.* $|x|<\delta_\varepsilon \Rightarrow\ |f(x,mx)|<\varepsilon$ e la cosa importante da osservare è che δ_ε non dipende da m. L'impostazione del conto precedente, nel nostro caso, implica dover risolvere la disequazione $\varepsilon m^2x^2+\varepsilon > |mx|$. Se $m=0$ è vera per ogni x e quindi $\delta_\varepsilon(m)_{m=0} = +\infty$ il che andrebbe bene. Se $m>0$ e $x>0$ la disequazione dà come risultato $x<x_- = \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon m}\ \vee\ x>x_+ = \frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon m}$ e poiché ci interessano valori arbitrariamente vicini all'origine consideriamo $0<x<x_-$. Se $m\to+\infty$, $x_-\to 0$ ossia $\inf_{m>0} x_-(\varepsilon,m) = 0$ e questo è il segno che non si ha uniformità rispetto al coefficiente angolare m.

2.7 $f_6(\underline{x})$: È continua in $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \mid |y|\neq x^2\ \vee\ y=0\}$. Che sia discontinua su $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \mid y=\pm x^2\ \vee\ y=0\}\backslash\{(\underline{0})\}$ è evidente. Un pò meno evidente è che sia discontinua anche nell'origine. Infatti si ha $\lim_{x\to 0} f(x,mx)\equiv 1$ per ogni m ma $\lim_{x\to 0} f(x,\frac{1}{2}x^2) = 0$ da cui la non continuità. Non essendo continua nell'origine non può verificarsi che il limite lungo una qualsiasi retta sia uguale ad 1 uniformemente rispetto all'inclinazione della retta ossia non può verificarsi che $\forall\,\varepsilon\ \exists\,\delta_\varepsilon$ *t.c.* $|x|<\delta_\varepsilon\Rightarrow\ |f(x,mx)-1|<\varepsilon$ e la cosa importante da osservare è che δ_ε non dipende da m. Dato infatti m deve aversi per forza $\delta_\varepsilon \le \|\underline{\xi}\|$ dove $\underline{\xi}$ è il punto di intersezione fra la parabola $y=x^2$ e la retta $y=mx$ ossia $\underline{\xi}=(m,m^2)$. Ne segue che $\delta_\varepsilon\le m\sqrt{1+m^2}$ e per $m\to 0$ $\delta_\varepsilon\to 0$ da cui deriva la non continuità della funzione nell'origine.
$\partial_x f(\underline{0}) = \partial_y f(\underline{0}) = 0$ e quindi la funzione è derivabile ma ovviamente non differenziabile. Negli altri punti di discontinuità la funzione non è derivabile in quanto vi è un salto (si verifichi ciò attraverso la definizione). Nei punti di continuità la funzione è differenziabile.
Inoltre $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(tv_1,tv_2)-f(\underline{0})) = 0$ in quanto $\forall\ \underline{v}\in\mathbf{R}^2\ \exists\ t_{\underline{v}} \mid |t|\le t_{\underline{v}}\ \Rightarrow\ (tv_1,tv_2)\in\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \mid |y|\ge x^2\}$. Dunque è valida la relazione $\underline{\partial}_{\underline{v}} f(\underline{0}) = \underline{\partial} f(\underline{0})\cdot\underline{v} = 0$ ma la funzione in $\underline{0}$ non è continua.

2.7 $f_7(\underline{x})$: Di questo esercizio verrà mostrato solamente come l'uso delle coordinate polari per dimostrare la continuità nell'origine debba accompagnarsi a qualche precisazione solitamente dimenticata dagli studenti.
Infatti in coordinate polari centrate nell'origine il modulo della funzione può maggiorarsi con $\frac{\rho}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$ e **l'unico** argomento che a volte erroneamente si usa per dire che $\lim_{\rho\to 0}$ è zero è, la presenza di una potenza positiva a numeratore. Tale argomento è errato come l'esercizio 5) del **4.7** e l'esercizio **17.7** mostrano Infatti qualunque sia la maggiorazione di $|f_7|$ usata, essa deve essere tale da togliere la presenza della variabile θ. In altre parole si deve arrivare ad una maggiorazione del tipo $|f_7|\le h(\rho)$ e $\lim_{\rho\to 0} h(\rho) = 0$. Per arrivare a ciò nel nostro caso si possono seguire due strade. La prima è fornita dalla proposizione seguente

Proposizione La funzione $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $\ f(\theta) = \cos^4\theta+\sin^4\theta$ ha un minimo con ordinata positiva.

Prima di dare la dimostrazione facciamo vedere come si usa tale risultato. Secondo la proposizione esiste un valore $\alpha > 0$ tale che $\cos^4\theta + \sin^4\theta \geq \alpha > 0$. Così essendo si può ulteriormente maggiorare $|f_7| \leq \frac{\rho}{\alpha}$ da cui la continuità ($h(\rho) = \frac{\rho}{\alpha}$ indipendente da θ).

Dimostrazione Sia $f(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta$: $\mathbf{R} \to (0,2)$. La funzione è periodica di periodo π e quindi si può considerarla definita in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ossia si definisce un'altra funzione $\tilde{f}(\theta)$: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [0,2]$ tale che $Im(f) = Im(\tilde{f})$. La funzione $\tilde{f}$ è definita su un compatto ed è continua per cui l'immagine del dominio, che chiameremo J, è un insieme compatto sottoinsieme di $(0,2)$. J è chiuso e quindi ammette minimo (α) e massimo (β) contenuti entrambe in $(0,2)$ che è aperto per cui $\alpha \neq 0$ ($\beta \neq 2$ ma non è importante per i nostri fini).■

Va notato che il precedente argomento *non ci dice chi è α ma solo che esiste certamente e per la sua esistenza abbiamo bisogno solo della periodicità e della continuità della funzione*

Il secondo metodo consiste nello studiare la funzione di una variabile $\cos^4\theta + \sin^4\theta$ con i metodi finora conosciuti e dimostrare attraverso la derivata prima che essa ha un minimo per $\theta_o = \frac{\pm\pi}{4}$ con $f(\theta_o) = \frac{1}{2}$ ed è esattamente il valore di α la cui esistenza è stata dimostrata prima. Va notata la differenza rispetto al metodo precedente. In questo caso si trova il valore dell'ordinata del minimo ma bisogna far uso della derivata della funzione mentre prima abbiamo usato solo la continuità.

La differenza fra i due metodi mette in luce un aspetto usuale della matematica: più dettagliate sono le proprietà che vogliamo conoscere della soluzione di un problema e più dettagliate devono essere le ipotesi.

Dunque la funzione è continua e derivabile ovunque ma non è differenziabile in $\underline{0}$ poiché $\lim_{\underline{h}\cdot\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|} \frac{h_1^3 h_2^2}{h_1^4 + h_2^4}$ non è zero (la funzione vale $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ sull'insieme $h_1 = h_2$).

Vale la pena ritornare sull'uso delle coordinate polari per risolvere il presente come qualsiasi altro esercizio. Supponiamo di avere una funzione f: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ $f = f(\underline{x})$ ed una funzione $\underline{g}$: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ $\underline{g} = (g_1(\underline{z}), g_2(\underline{z}), \ldots, g_n(\underline{z}))$. Supponiamo che $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = l$ e che $\lim_{\underline{z}\to\underline{z}_o} \underline{g}(\underline{z}) = \underline{L}$ con $\underline{L} = \underline{x}_o$. Ossia supponiamo che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon \mid 0 < |\underline{x} - \underline{x}_o| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\underline{x}) - l| < \varepsilon$ e che $\forall\ \varepsilon' > 0\ \exists\ \delta_{\varepsilon'} \mid 0 < |\underline{z} - \underline{z}_o| < \delta_{\varepsilon'} \Rightarrow |\underline{g}(\underline{z}) - \underline{L}| < \varepsilon'$.
Supponiamo inoltre che $\underline{g}(\underline{z}) \neq \underline{L}$ definitivamente per $\underline{z} \to \underline{z}_o$ ossia esiste una sfera di centro $\underline{z}_o$ e raggio r $B(\underline{z}_o; r)$ tale che $\underline{g}(\underline{z}) \neq \underline{L}\ \forall\ \underline{z} \in B(\underline{z}_o; r)$. Se stessimo trattando funzioni continue non sarebbe necessario specificare tale fatto. Costruiamo la funzione $f \circ \underline{g}$: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ $f \circ \underline{g} = f \circ \underline{g}(\underline{z}) \doteq h(\underline{z})$. Non è difficile dimostrare che $\lim_{\underline{z}\to\underline{z}_o} h(\underline{z}) = l$. Se infatti $\varepsilon' = \delta_\varepsilon$ allora $0 < |\underline{z} - \underline{z}_o| < \varepsilon' \Rightarrow 0 < |\underline{x} - \underline{x}_o| < \delta_\varepsilon$. e quindi $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_o)| < \varepsilon$. Dunque dalla esistenza dei limiti per le funzioni f e $\underline{g}$ segue la esistenza per la funzione h. A parole si può dire che *la composizione di funzioni che ammettono limite ammette anche essa limite.*
Supponiamo ora di avere una funzione F: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $F = F(\underline{x})$, $\underline{x}_o = \underline{0}$ e $\underline{G}$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. $\underline{G} = \underline{G}(\rho, \theta)$. $\underline{x}_o = \underline{0}$ vuol dire $\rho = 0$ e θ qualsiasi valore. $\underline{x} = (x, y) = \underline{G}(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. $F \circ \underline{G}(\rho, \theta) \doteq f(\rho, \theta)$. Negli esercizi in cui si passa a coordinate polari si arriva ad avere una funzione delle coordinate polari. Se ne cerca il limite e poi da esso si cerca di inferire il limite della funzione originaria data nelle coordinate (x, y). In altre parole si cerca il limite della funzione f e poi si passa al limite della funzione $f \circ (\underline{G})^{-1}$ che è esattamente la F originaria. Nel far questo si cerca di usare il risultato precedente ossia che *la composizione di funzioni che ammettono limite ammette anche essa limite.* Senonché la funzione che lì è data da $\underline{g}$ è qui data dalla inversa di $\underline{G}$ che é non univocamente definita e nell'origine $(x, y) = (0, 0)$ non ammette limite. Infatti

$$\underline{G}^{-1}(x,y) = (G_1^{-1}(x,y), G_2^{-1}(x,y)) = \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z},\ \text{se } \theta \in (-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi) \end{cases}$$

Dunque apparentemente l'uso delle coordinate polari sarebbe del tutto inutile in quanto non si può usare il risultato. In realtà osservando attentamente la definizione di limite in coordinate polari la situazione si risolve. Infatti la definizione è data da: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon \mid 0 < \rho < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(\rho,\theta) - l| < \varepsilon$. Come si vede è assente la variabile θ dalla definizione di intorno definito da δ_ε. Ora $0 < |\underline{x}| < a \Rightarrow 0 < \rho < a$ ed inoltre $\sqrt{x^2+y^2} \not\equiv 0$ per ogni sfera aperta con centro $\underline{0}$. Quindi la composizione $f \circ (\underline{G})^{-1}(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}, G_2^{-1}(x,y))$ ammette il limite per $(x,y) \to (0,0)$ il che vuol dire che esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$. Se ne deduce che pur non essendo $\underline{G}^{-1}$ una funzione continua nell'origine, $\underline{G}_1^{-1}$ lo è e questo basta per avere il limite nella funzione F in quanto il limite della f è *uniforme in* θ.

2.7 $f_8(\underline{x})$: Essendo $|\sin z| \le |z|$ e $(z+z')^2 \le (|z|+|z'|)^2$ si ha che per $\alpha < 1$ la funzione è continua. Infatti si può maggiorare con $\sin(x+\sin y) \le (x+\sin y)^2 \le (|x|+|\sin y|)^2 \le (|x|+|y|)^2 \le 2(|x|^2+|y|^2)$. *A questo punto ancora non si è concluso il discorso sulla continuità in quanto bisogna mostrare che la funzione non è continua per* $\alpha \ge 1$. Se $\alpha = 1$ si ha $\begin{cases} \dfrac{\sin^2(x+\sin y)}{(x^2+y^2)} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ e $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 2 \neq 0$ da cui l'assenza di continuità. Inoltre se $\alpha > 1$ lo stesso limite è $+\infty$.

Derivabilità in $(0,0)$ rispetto a tutte le direzioni:

$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(tv_1, tv_2,) - f(0,0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{\sin^2(tv_1+\sin tv_2)}{t^{2\alpha}(v_1^2+v_2^2)} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2(tv_1+\sin tv_2)}{t^{1+2\alpha}} = \lim_{t\to 0} \frac{(tv_1+tv_2)^2}{t^{1+2\alpha}} = \lim_{t\to 0} t^{1-2\alpha}(1+2v_1v_2)$. Se $\alpha < \frac{1}{2}$ allora il limite è 0 e quindi $\partial_{\underline{v}} f(0,0) = 0$. Se $\alpha = \frac{1}{2}$ allora la derivata è $1 + 2v_1v_2$ e quindi $\partial_x f(\underline{0}) = 1 = \partial_y f(\underline{0})$. Se $v_1 = v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ la derivata vale 2. Se $\alpha > \frac{1}{2}$ il limite non esiste.

Differenziabilità: certamente in $\mathbf{R}^2\backslash\{\underline{0}\}$; In $(0,0)$ si ha

$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}\Big(\frac{\sin^2(h_1+\sin h_2)}{\|\underline{h}\|^{2\alpha}} - f(\underline{0}) - \underline{\partial} f(\underline{0}) \cdot \underline{h}\Big)$ e supponiamo che $\alpha < \frac{1}{2}$. Si ha

$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\Big(\frac{\sin^2(h_1+\sin h_2)}{\|\underline{h}\|^{1+2\alpha}}\Big) = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\Big(\frac{(h_1+h_2)^2}{\|\underline{h}\|^{1+2\alpha}}\Big) = 0$ e quindi la funzione è differenziabile. Se $\alpha \ge \frac{1}{2}$ non è differenziabile in quanto il precedente limite non esiste.

2.7 $f_9(\underline{x})$ In coordinate polari la funzione è presto scritta:

$\rho^{2-4\alpha} \frac{\rho^2\cos^4\theta + \rho^2\sin^4\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta}{\sin^4\theta + 3\cos^4\theta}$. Se $\alpha < \frac{1}{2}$ la funzione è continua in quanto $\sin^4\theta + 3\cos^4\theta \ge c > 0$ (e c facilmente calcolabile; vedi l'esercizio con $f_7(\underline{x})$). Se $\alpha = \frac{1}{2}$ il limite non esiste come si vede facendo $\lim_{\rho\to 0} f(\rho, \theta = \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$. Se $\alpha < \frac{1}{2}$ il limite non esiste non essendo definito.

Derivabilità: Certamente in tutti i punti che non siano l'origine per ogni valore di α. Nell'origine si ha $\partial_x f(\underline{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^{3-4\alpha}}{3^\alpha}$ per cui se $\alpha < \frac{3}{4}$ il limite è zero. Se $\alpha = \frac{3}{4}$ il limite è $\frac{1}{3^\alpha}$ mentre se $\alpha > \frac{3}{4}$ il limite non esiste. Dunque

$\partial_x f(\underline{0}) = \begin{cases} 0 & \alpha < 3/4 \\ 3^{-\frac{3}{4}} & \alpha = 3/4 \\ \nexists & \alpha > 3/4 \end{cases}$ Allo stesso modo si ha $\partial_y f(\underline{0}) = \begin{cases} 0 & \alpha < 3/4 \\ 1 & \alpha = 3/4 \\ \nexists & \alpha > 3/4 \end{cases}$

Differenziabilità: Certamente in tutti i punti che non siano l'origine per ogni valore di α. Nell'origine, se $\alpha < \frac{1}{2}$ si ha $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \frac{h_1^4+h_2^4+h_1h_2}{(h_2^4+3h_1^4)^\alpha}$ ed il limite è zero solo se $\alpha < \frac{1}{4}$ per cui nell'origine è differenziabile solo se $\alpha < \frac{1}{4}$.

2.7 – Seconda Parte – La funzione $\frac{xy}{x^2+y^2}$ non può ammettere limite su E_i in quanto la funzione ristretta ad una qualsiasi retta di equazione $y = mx$ con $m \geq 0$ diventa $f(x, mx) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ che non è certo $+\infty$.

Consideriamo ora la funzione $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in E_1. Potendo maggiorare $f(x,y) \leq \frac{\sqrt{yx}}{\sqrt{2}}$ si ottiene $\exists\ M > 0 \mid \forall\ r > 0\ \exists (x_o, y_o) \in \mathcal{U}_r \cap E \mid \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq M$. Basta prendere $y_o \leq \frac{2M}{x_o}$ se $x_o \geq \frac{r}{\sqrt{2}}$ oppure $x_o \leq \frac{2M}{y_o}$ se $y_o \geq \frac{r}{\sqrt{2}}$ da cui il fatto che il limite non esiste. Si noti che qualsiasi restrizione ad una funzione $y = mx$ con $m \neq 0$ avrebbe dato $+\infty$.

Consideriamo ora la funzione $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in E_2. Il precedente ragionamento non funziona più in quanto non si possono rendere x oppure y arbitrariamente piccoli. Se però consideriamo la restrizione della funzione ad una retta verticale di ascissa maggiore di $a' > a$ allora la funzione, per $y \to +\infty$ tende al valore $a' \neq +\infty$ per cui il limite non solo è diverso da $+\infty$ ma non esiste in quanto dipenderebbe dalla restrizione.

Consideriamo ora la funzione $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in E_3. Potendosi minorare $f(x,y) \geq \frac{x}{10\sqrt{1+100}}$ se $x > 10\sqrt{101}M$ e quindi $y > M\sqrt{101}$ e quindi $\sqrt{x^2+y^2} \geq 101M \doteq r_{_M}$ si ha $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} > M$. Dunque il limite è $+\infty$

Consideriamo ora la funzione $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in E_4. Valgono le considerazioni precedenti solo che $r_{_M} = \max\{a\sqrt{2}, 101M\}$.

3.7*** $f(\underline{x}) = \dfrac{x}{\cos^2 \frac{x}{y} + \sin^2 \frac{\alpha x}{y}}$ $\qquad f_2(x,y) = -f_2(-x,y) = f_2(x,-y)$

$\alpha = 0 \;\Rightarrow\; f(\underline{x}) = \dfrac{x}{\cos^2 \frac{x}{y}}$

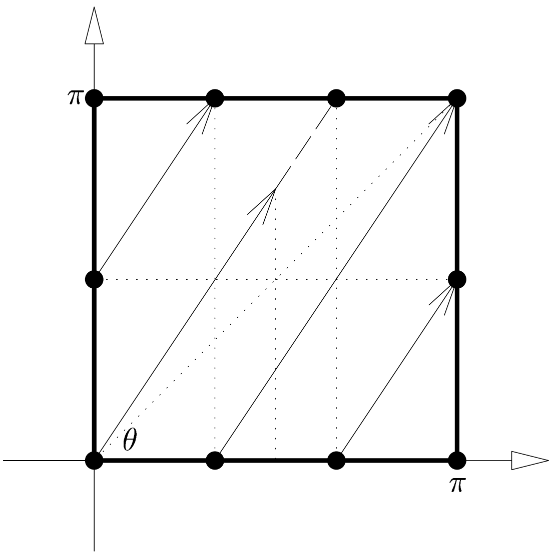
$Dom(f) = \mathbf{R}^2 \backslash \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0 \ \vee\ \frac{x}{y} = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Nei punti dove è definita, la funzione è continua e quindi ammette anche il limite. Ci chiediamo ora se esistono altri punti del piano, che non fanno parte del dominio della funzione ed in cui la funzione ammette limite. L'asse delle ascisse non fa parte del dominio della funzione. Nonostante ciò ha senso chiedersi se esiste $\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f(\underline{x})$ in quanto un qualsiasi punto $(x_o, 0)$ è punto di accumulazione di $Dom(f)$. Sia $x_o > 0$ e consideriamo la successione di punti $\{(x_k, y_k)\} = \{(x_o, \frac{x_o}{\frac{\pi}{2}+k\pi+\varepsilon_k})\}$ con $0 < \varepsilon_k < \pi$ (un rapido calcolo fa vedere che la condizione $0 < \varepsilon_k < \pi$ serve a far si che $\{(x_k, y_k)\} \in Dom(f)$). Si vede facilmente che $\cos^2 \frac{x_k}{y_k} = \sin^2 \varepsilon_k$ e quindi $\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k}{\cos^2 \frac{x_k}{y_k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{x_o}{\sin^2 \varepsilon_k}$ e se $\varepsilon_k \to 0$ tale limite vale $+\infty$. Del resto qualunque sia l'insieme di $\mathbf{R}^2$, diciamo A, tale che $(x_o, 0) \in A'$ si ha $\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f|_A(\underline{x}) = +\infty$. Infatti il fascio di rette $\frac{x}{y} = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, ha $(x_o, 0)$ come punto di accumulazione. Sulle rette la funzione non è definita ma è illimitata sul complementare. Ne segue che il limite non può che essere infinito. Tale "evidenza" necessita di una dimostrazione. Supponiamo infatti che $\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f|_A(\underline{x}) = l > 0 \ \neq +\infty$. Dalla definizione di limite segue che esiste un intorno aperto di $(x_o, 0)$, diciamo U, tale che $\underline{x} \in U \backslash \{(x_o, 0)\} \;\Rightarrow\; \frac{l}{2} < f|_A(\underline{x}) < \frac{3}{2}l$. Ma dentro U cadono punti del fascio di rette $\frac{x}{y} = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, definitivamente per $|k| \to +\infty$ e quindi è impossibile la relazione $f|_A(\underline{x}) < \frac{3}{2}l$.
Sui punti diversi dall'origine che appartengono al fascio di rette $\frac{x}{y} \neq \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, il limite fa $+\infty$ per le stesse ragioni.
Sempre nel caso $\alpha = 0$ consideriamo ora $\underline{x} = (0,0)$. La restrizione della funzione all'asse delle ordinate ha come limite zero per cui se tale limite esiste deve essere zero. Consideriamo però i punti di coordinate $(x_k, y_k) = (\frac{1}{a_k}, \frac{1}{a_k^2})$ con $a_k = \frac{\pi}{2} + \pi k + \varepsilon_k$. $f(x_k, y_k) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi+\varepsilon_k} \frac{1}{\sin^2 \varepsilon_k}$ e se $\lim_{k\to+\infty} k\varepsilon_k^2 = 0$ allora il limite è $+\infty$ mentre noi sappiamo che deve essere nullo.

$\alpha = 1 \;\Rightarrow\; f(\underline{x}) = x$

C'è ben poco da dire. $Dom(f) = \mathbf{R}^2$. La funzione ammette limite in ogni punto del piano.
Sia ora $\alpha \in \mathbf{Z} \;\wedge\; \alpha = 2p,\; p \neq 0$. Poiché $\pm\frac{\alpha}{2} + \alpha k = \pm p + 2pk \in \mathbf{Z}$, il denominatore si annulla e quindi $Dom(f) = \mathbf{R}^2 \backslash \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0 \vee \frac{x}{y} = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
Le conclusioni del caso $\alpha = 0$ ci dicono che il limite nel punto $(x_o, 0)$ con $x_o \neq 0$ è $+\infty$. Ed infatti se ad esempio si esamina cosa accade lungo la succecssione $\{(x_k, y_k)\} = \{(x_o, \frac{x_o}{\frac{\pi}{2}+k\pi+\varepsilon_k})\}$ un rapido calcolo dà $\cos\frac{x_k}{y_k} = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi + \varepsilon_k) = -(-1)^k \sin\varepsilon_k$ mentre $\sin\frac{\alpha x_k}{y_k} = \sin 2p(\frac{\pi}{2} + k\pi + \varepsilon_k) = (-1)^p \sin\varepsilon_k$ da cui il limite che fa $+\infty$. Analogamente a prima nel punto $(0, 0)$ il limite non esiste.
Il caso successivo è $\alpha \in \mathbf{Z} \;\wedge\; \alpha = 2p + 1,\; p \neq 0$. Il denominatore non si annulla mai e quindi $Dom(f) = \mathbf{R}^2 \backslash \{\underline{x} \mid y = 0\}$. Sulla successione $(x_k, y_k) = (x_o, \frac{x_o}{2\pi k})$ $(x_o \neq 0)$ la funzione vale identicamente x_o mentre sulla successione $(x_k, y_k) = (x_o, \frac{x_o}{\frac{1}{\alpha}(\pi k+\frac{\pi}{2})})$ si ha $f(x_k, y_k) = \frac{x_o}{1+\cos^2\frac{1}{\alpha}(\pi k+\frac{\pi}{2})}$ ed il limite non esiste (perché?)
Sia ora $x_o = 0$ e consideriamo $f(x, mx) = \frac{x}{\cos^2\frac{1}{m}+\sin^2\frac{\alpha}{m}}$ al variare di $m \in \mathbf{R}$. L'esistenza del limite per $x \to 0$ ci dà: $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta_\varepsilon(m) \mid |x| < \varepsilon(\cos^2\frac{1}{m} + \sin^2\frac{\alpha}{m}) \;\Rightarrow\; |f(x, mx)| < \varepsilon$. Inoltre si ha $\inf_{m\in\mathbf{R}}(\cos^2\frac{1}{m} + \sin^2\frac{\alpha}{m}) = \inf_{t\in\mathbf{R}\backslash\{0\}}(\cos^2 t + \sin^2 t\alpha) \geq \inf_{t\in\mathbf{R}}(\cos^2 t + \sin^2 t\alpha)$. Ora la funzione $F\colon \mathbf{R} \to (0, 2)$, $F(t) = \cos^2 t + \sin^2 t\alpha$ è periodica di periodo $\frac{\pi}{\alpha}$ e quindi $Im(F) = Im(\tilde{F})$ dove $\tilde{F}\colon [0, \frac{\pi}{\alpha}] \to (0, 2)$. Essendo la funzione continua ed il suo dominio un intervallo chiuso e limitato (compatto) l'immagine sarà un intervallo chiuso e limitato, diciamo $[a, b]$, sottoinsieme di $(0, 2)$. Ne segue che $\inf_{t\in\mathbf{R}}(\cos^2 t + \sin^2 t\alpha) = a$. Di conseguenza $\inf_{m\in\mathbf{R}} \delta_\varepsilon(m) = \varepsilon a$ e quindi abbiamo ottenuto un valore di δ_ε che va bene *per ogni valore di m.* Ne segue che la funzione ammette il limite $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$ quando $\alpha = 2p+1$ e $p \neq 0$. La restrizione di f alla retta verticale condotta per x_o ha come limite zero.

Sia ora $\alpha \in \mathbf{Q}$ $\alpha = \frac{p}{q}$, $q \neq 1$ e p e q primi fra di loro. Le conclusioni sono le stesse del caso percedente. Scegliamo la successione $(x_k, y_k) = (x_o, x_o\frac{q}{2\pi k})$, che si accumula in $(x_o, 0)$. Si ha $f(x_k, y_k) = \frac{x_o}{\cos^2(\frac{2\pi k}{q})}$ per cui il limite non esiste. Se $x_o = 0$ allora il limite esiste come nel precedente caso.

Da ultimo è rimasto il caso $\alpha \in \mathbf{Q}^c$. Il denominatore non si annulla; $Dom(f) = \mathbf{R}^2 \backslash \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y = 0\}$. È continua certamente nei punti con ordinata diversa da zero.
Consideriamo ora il quadrato di lato π evidenziato dalla figura



$\theta = \arctan\frac{\omega_2}{\omega_1}$

ed identifichiamo i lati opposti in modo tale che se venissero realmente congiunti si otterrebbe una ciambella (è la generalizzazione di quanto si ottiene da un segmento in cui si identificano gli estremi che una volta congiunti danno luogo ad una circonferenza). Tale insieme, detto *toro bidimensionale*, si indica con $\mathbf{T}^2$.
Data ora una coppia di numeri reali $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$, consideriamo la applicazione $f_{\underline{\omega}}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{T}^2$ data da $f_{\underline{\omega}}(x_1^o, x_2^o)(t) = (x_1^o + \omega_1 t, x_2^o + \omega_2 t)$ (modulo π per entrambe le componenti); In altre parole, prendiamo ad esempio la prima coordinata, da $x_1^o \in [0, \pi]$, si ottiene $x_1^o + \omega_1 t$ con $t \in \mathbf{R}$ e si individua quell'unico punto p del segmento $[0, \pi]$ la cui coordinata è data da $x_1^o + \omega_1 t - \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Lo stesso si fa con la seconda coordinata. Il disegno riporta il caso in cui $\omega_1 = 2$ ed $\omega_2 = 3$. L'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{T}^2 \ \mid x = x_1^o + \omega_1 t,\ y = x_2^o + \omega_2 t\}$ è detto "orbita". Se accade che esistano due valori t_1 e t_2 tale che $(\omega_1 t_1, \omega_2 t_1) = (\omega_1 t_2, \omega_2 t_2)$ (modulo π) si dice che l'orbita è chiusa.
Ad esempio nel disegno si ha $x_1^o = 0, x_2^o = 0$, $\omega_2 = 3$, $\omega_1 = 2$ ed infatti una volta arrivata nel punto (π, π) l'orbita si è chiusa essendo (π, π) equivalente a $(0, 0)$.
Definiamo poi la mappa $M\colon \mathbf{T}^2 \ \to V \subset \mathbf{R}^2$ $(Im(M) = V)$ $M(x_1', x_2') = (x, y)$, $x = \cos^2 x_1' \quad y = \sin^2 x_2'$. Se ora facciamo la composizione $M \circ f$ otteniamo una mappa da $\mathbf{R}$ in V data da $(M \circ f)(t) = (\cos^2(x_1 + \omega_1 t), \sin^2(x_2 + \omega_2 t))$. Si noti che $Im(M \circ f) \neq Im(M)$ in quanto $Im(f) \neq \mathbf{T}^2$.
Il risultato preciso che dimostriamo è:

Proposizione $\frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbf{Q} \ \Rightarrow \ \overline{Im\,(M \circ f)} = Im\,(M \circ f); \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbf{Q} \ \Rightarrow \ \overline{Im\,(M \circ f)} = V$

Osservazione 1) a parole si può dire che se $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbf{Q}$ allora $Im\,(M \circ f)$ è densa in V mentre se è razionale $Im\,(M \circ f)$ è un insieme chiuso in V 2) Se la mappa $f_{\underline{\omega}}$ fosse definita per $t \geq t_o > 0$ oppure $t \leq t_o < 0$, il risultato della proposizione non cambierebbe 3) Nell'esercizio in questione si pone $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = \alpha$ [5.7]

Dimostrazione
$x_1^o + \omega_1 t_k = \pi k$ per $t_k = \frac{\pi k - x_1^o}{\omega_1}$. corrispondentemente a t_k si ha $x_2(t_k) = x_2^o - \frac{\omega_2}{\omega_1} x_1^o + \frac{\omega_2}{\omega_1} \pi k$. In altre parole, in corrispondenza ai valori t_k il punto $(x_1(t_k), x_2(t_k))$ si trova sull'insieme $\mathcal{A} \equiv \{(x, y) \in \mathbf{T}^2 \ \mid x = \pi, y = \tilde{x}_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \pi k\}$ dove $\tilde{x}_2 = x_2^o - \frac{\omega_2}{\omega_1} x_1^o$.
$x_2(t_k) - x_2(t_{k'}) = \frac{\omega_2}{\omega_1} \pi (k - k')$ e quindi se $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p}{q}$ (p e q interi e primi fra di loro) allora per $k - k' = Nq$ (N intero) si ha $x_2(t_k) - x_2(t_{k'}) = \pi N q p$ ossia $(x_1(t_k), x_2(t_k)) \equiv (x_1(t_{k'}), x_2(t_{k'}))$ e qindi l'orbita è periodica.
Se $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ non è un numero razionale allora lo stesso ragionamento porta a dire che l'orbita non si richiude mai su se stessa anche se ciò non significa che sia densa.
Supponiamo quindi che $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ non è razionale. L'esercizio **8.3***** ci dice che l'insieme $\mathcal{A}$ descritto prima è denso sul segmento verticale di ascissa π. Immaginiamo ora di tracciare, per ogni punto di coordiante $(\pi, x_2(t_k))$, una retta avente per ogni punto la stessa inclinazione purché non sia verticale. Tale fascio di rette è denso nel quadrato $\mathbf{T}^2$. Ne segue che l'orbita $(x_1(t), x_2(t))$ è densa nel quadrato $\mathbf{T}^2$. Dunque abbiamo dimostrato che $\overline{Im\,(f)} = \mathbf{T}^2$. Essendo M continua essa manda sottoinsiemi densi in sottoinsiemi densi e quindi l'immagine secondo M di $Im\,(f)$ è densa in V. *fine della dimostrazione*

Dalla dimostrazione segue che qualunque sia la coppia (x_1^o, x_2^o), l'insieme $\{(x, y) \in \mathbf{T}^2 \ \mid x = x_1^o + \omega_1 t,\ y = x_2^o + \omega_2 t\}$ è denso su $\mathbf{T}^2$. Quindi l'orbita interseca il segmento di ascissa $\frac{\pi}{2}$. Se lo interseca una volta lo interseca infinite volte e quindi è data la successione $x_1(t_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ da cui $t_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (prendendo $x_1^o = 0$) e quindi $x_2(t_k) = \frac{\pi}{2}\alpha + \alpha k \pi \doteq \tilde{x} + \pi \alpha k$ (si è preso $x_2^o = 0$).

[5.7] La dimostrazione che verrà esposta è tratta dal libro V.I.Arnold *"Equazioni differenziali ordinarie" Edizioni Mir pag.181.* La dimostrazione della stessa proposizione si trova nel libro G.Gallavotti *"Meccanica Elementare" Editore Boringhieri pag.112* e G.Gallavotti *"The Elements of Mechanics" Springer Verlag Ed.*

Essa è densa sul sottoinsieme di $\mathbf{T}^2$ dato da $x = \frac{\pi}{2}$. Dunque dalla successione si può estrarre una sottosuccessione $\{t_{k_n}\}$ tale che $\{(x_1)_{k_n}, (x_2)_{k_n}\} \doteq (t_{k_n}, \alpha t_{k_n},) \doteq (\frac{\pi}{2} + \pi k_n, \tilde{x} + \pi\alpha k_n)$ ed inoltre $t_{k_n} \equiv \frac{\pi}{2}$ (modulo π) e $(x_2)_{k_n} \to 0$ (modulo π). Ciò vuol dire che $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \mid \forall\ n > n_\varepsilon\ \exists\ q_n \mid |\alpha k_n \pi + \tilde{x} - \pi q_n| < \varepsilon$ ossia $|\alpha + \frac{\tilde{x}}{k_n} - \frac{q_n}{k_n}| < \frac{\varepsilon}{\pi k_n}$.

Sia dato ora il punto $\underline{0} \in \mathbf{R}^2$ e consideriamo la restrizione della funzione alla parabola $y = x^2$ ossia $f(x, x^2) = \frac{x}{\cos^2 \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{\alpha}{x}}$ e poniamo $x = \frac{1}{t}$ per cui $f(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}) = \frac{1}{t}\frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 \alpha t}$. Consideriamo inoltre la sottosuccessione di prima $\{(x_1)_{k_n}, (x_2)_{k_n}\}$; $\cos^2(t_{k_n}) + \sin^2((x_2)^2_{k_n}) \doteq \cos^2(t_{k_n}) + \sin^2(\alpha t_{k_n}) = \sin^2(\tilde{x} + \pi\alpha k_n) = \sin^2(\alpha\pi k_n + \tilde{x} - \pi q_n + \pi q_n) = \sin^2(\pi\alpha k_n + \tilde{x} - \pi q_n) \sim (\pi^2\alpha k_n - \pi^2 q_n + \tilde{x})^2$.
Quindi abbiamo $f(\frac{1}{t_{k_n}}, \frac{1}{t^2_{k_n}}) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k_n}\frac{1}{\sin^2(\pi\alpha k_n - \pi q_n + \tilde{x})} \geq \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k_n}\frac{1}{(\pi\alpha k_n - \pi q_n + \tilde{x})^2}$; se ora prendiano $\varepsilon = \frac{1}{k_n}$ si ottiene $\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k_n}\frac{1}{(\pi\alpha k_n - \pi q_n + \tilde{x})^2} \geq \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k_n}\frac{1}{\frac{1}{\pi k_n^2}}$ che tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$.
Nei punti $(x_o, 0)$ il risultato è lo stesso ossia il limite è $+\infty$.

4.7 $f_1(\underline{x})$: È chiaro che nei punti che hanno ordinata diversa da zero la funzione è differenziabile tutte le volte che si vuole. Consideriamo ora i punti con coordinate del tipo $\underline{x} \equiv (x_o, 0)$ ed indichiamo con $Y^+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$, $Y^- = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \leq 0\}$. In base al `Teorema 7.1` se esiste $\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f_1(\underline{x})$ allora esistono e sono uguali i limiti $\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f_1|_{Y^+}(\underline{x})$, $\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f_1|_{Y^-}(\underline{x})$ essendo $(x_o, 0) \in (Y^+)'$ e $(x_o, 0) \in (Y^-)'$
$\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f_1|_{Y^-}(\underline{x}) = 1$ e δ_ε qualsiasi numero positivo per cui la funzione può ammettere limite solo se $\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f_1|_{Y^+}(\underline{x}) = 1$.
Ipotizziamo $\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f_1|_{Y^+}(\underline{x}) = x_o$. Se così fosse dovremmo dimostrare che $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon \mid 0 < \|\underline{x} - (x_o, 0)\| < \delta_\varepsilon\ \wedge\ \underline{x} \in Y^+\ \Rightarrow\ |f_1(\underline{x}) - x_o| < \varepsilon$. Impostiamo dunque $|\frac{\sin(xy) - x_o y}{y}|$ ed usando lo sviluppo di Taylor centrato in $y = 0$ di $\sin(xy)$ come funzione della sola y e considerando x come costante si ottiene $\sin(xy) = xy - \frac{1}{6}x^3\cos(x\eta)y^3$ dove $0 < \eta < y$ (si badi che $\eta > 0$ in quanto $(x, y) \in Y^+$). Dunque si ottiene $|\frac{\sin(xy) - x_o y}{y}| = |\frac{-\frac{1}{6}x^3\cos(x\eta)y^3 + y(x - x_o))}{y}|$ e quindi si può trovare δ_ε in corrispondenza a ε. Infatti maggioriamo $|x - x_o| + |x|^3y^2$ e prendiamo $|x - x_o| \leq 1$, $0 < y < 1$ da cui $|x - x_o| + |x|^3y^2 \leq |x - x_o| + (1 + |x_o|)^3 y \leq (1 + |x_o|)^3\sqrt{2}\sqrt{(x - x_o)^2 + y^2}$ da cui $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(1 + |x_o|)^3}$. Tenendo conto che il precedente δ_ε era $+\infty$ ne ricaviamo che $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(1 + |x_o|)^3}$.
Abbiamo mostrato come $\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)} f_1|_{Y^+}(\underline{x}) = x_o$ da cui si deduce che il limite può esistere solo se $x_o = 1$. Quindi consideriamo $(x_o, y_o) = (1, 0)$. A rigor di logica ancora non abbiamo mostrato che $\lim_{\underline{x}\to(1,0)} f_1(\underline{x}) = 1$ in quanto fino ad ora abbiamo esaminato due restrizioni solamente (ancorché particolari): Y^+ ed Y^-. Il `Teorema 7.1` parla però di *qualsiasi restrizione che abbia* $(1, 0)$ *come punto di accumulazione.* Sia quindi $A \subset \mathbf{R}^2$ tale che $(1, 0) \in A'$. Ciò vuol dire che esiste una successione di punti $\{x_k, y_k\} \subset A$ tale che $\lim_{k\to+\infty}(x_k, y_k) = (1, 0)$ per cui definitivamente $\sqrt{x_k^2 + y_k^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(1 + |x_o|)^3}$. Poiché si ha $\{x_k, y_k\} \subset Y^+ \cup Y^-$ ne segue che $\lim_{k\to+\infty} f(x_k, y_k) = 1$.
Prima di proseguire è bene dire due parole sullo sviluppo di Taylor appena scritto. Si può osservare che il resto verifica il limite $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1}{6}\frac{|x|^3|y|^3}{(x - x_o)^2 + y^2} = 0$ per cui dal `Teorema 7.6 pag.333, formule 7.31 e 7.32 con` $m = 2$ si ha che xy è l'unico polinomio tale che $f_1(x, y) - xy$ è un o–piccolo di $(x - x_o)^2 + y^2$ quando $(x, y) \to (x_o, 0)$. Verifichiamo che il polinomio verificante la relazione $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1}{6}\frac{|x|^3|y|^3}{(x - x_o)^2 + y^2} = 0$ e scaturente dall'eseguire le derivate parziali della funzione è esattamente quello scritto ossia xy. Detta $f(x, y) = \sin(xy)$ si ha $\partial_x f = y\cos(xy)$, $\partial_y f = x\cos(xy)$, $\partial_{xx} f = -y^2\sin(xy)$ $\partial_{yy} f = -x^2\sin(xy)$, $\partial_{xy} f = \cos(xy) - xy\sin(xy)$, $\partial_{xxx} f = -y^3\cos(xy)$, $\partial_{yyy} f = -x^3\cos(xy)$, $\partial_{xxy} f = -2y\sin(xy) - y^2x\cos(xy)$, $\partial_{yyx} f = -2x\sin(xy) - x^2y\cos(xy)$. Ora dalle derivate fino all'ordine 2 e calcolate in $(x, y) = (x_o, 0)$ si ottiene $x_o y + (x - x_o)y$ che è esattamente xy. Nell'ordine le funzioni $(x - x_o)^3$, y^3, $(x - x_o)^2y$, $((x - x_o)y^2$ sono tali che divise per $(x - x_o)^2 + y^2$ danno come limite zero e quindi si è riottenuto

quanto scritto prima.
Detto $\underline{x}_o = (1,0)$ si $\partial_x f(\underline{x}_o) = 0$ essendo $\partial_x f(\underline{x}) = 0$ per ogni punto della forma $(x,0)$. $\partial_y f(\underline{x}_o) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(1,t)-1)$; il limite sinistro è nullo in quanto la funzione vale 1 per ordinate negative. Il limite destro dà $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(\frac{\sin t}{t}-1) = 0$ e quindi $\underline{\partial} f(1,0) = \underline{0}$. Vediamo ora $\partial_y f(\xi,0)$ con $\xi \neq 1$. La derivata sinistra è nulla mentre quella destra è $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(\frac{\sin \xi t}{t}-1)$ ed il limite non esiste.
La funzione è differenziabile per $y>0$. Per $y=0$ ha senso solo per $x=1$.
$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\|h\|}(f((1,0)+\underline{h})-1) = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\|h\|}(\frac{\sin(1+h_1)h_2}{h_2}-1) \neq 0$ (si esamini cosa accade lungo la famiglia di curve (h_1,h_1^2)).

$$\partial_x f(\underline{x}) = \begin{cases} \cos xy & y>0 \\ 0 & y\le 0\end{cases} \qquad \partial_y f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x\cos xy}{y} - \dfrac{\sin xy}{y^2} & y>0 \\ \nexists & y=0\wedge x\neq 1 \\ 0 & (x=1\wedge y=0)\vee\ y<0\end{cases}$$

Calcoliamo le derivate seconde. Se $y>0$ allora $\partial_{xx} f(\underline{x}) = -y\sin xy$, $\partial_{yy} f(\underline{x}) = -2\frac{x}{y^2}\cos xy + \frac{\sin xy}{y}(\frac{1}{y^2}-x^2)$, $\partial_{xy} f(\underline{x}) = \partial_{yx} f(\underline{x}) = -x\sin xy$. Se $y<0$ allora $\partial_{xx} f(\underline{x}) = \partial_{yx} f(\underline{x}) = \partial_{xy} f(\underline{x}) = \partial_{yy} f(\underline{x}) = 0$. Se $(x,y) = (\xi,0)$, essendo $(\partial_x f(\xi+t,0) - \partial_x f(\xi,0)) \equiv 0$, $\forall\ \xi,\ t$ si ha $\partial_{xx} f(\underline{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\partial_x f(\ \xi+t,0) - \partial_x f(\xi,0)) \equiv 0$ per ogni ξ (1 incluso). Se $\xi\neq 1$ certamente non possono esistere $\partial_{yy} f(\underline{x})$ e $\partial_{xy} f(\underline{x})$ in quanto non esiste $\partial_y f(\underline{x})$ in quei punti. Vediamo ora $\partial_{yx} f(\underline{x})$ in $(\xi,0)$ e $\xi\neq 1$. Dobbiamo eseguire $\partial_{yx} f(\underline{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\partial_x f(\xi,t) - \partial_x f(\xi,0)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\partial_x f(\xi,t)$. Ora se $t<0$ si ha 0 in quanto $\partial_x f(\xi,t)\equiv 0$ e quindi $\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t}\partial_x f(\xi,t) = 0$. Se $t>0$ abbiamo $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\partial_x f(\xi,t) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\cos\xi t$ che non esiste e dunque non esiste neanche $\partial_{yx} f(\underline{x})$ nei punti dell'asse delle x con ascissa diversa da 1. $\partial_{yy} f(1,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\partial_y f(1,t) - \partial_y f(1,0))$ ed il limite sinistro vale zero mentre il limite destro vale $-\frac{1}{3}$ per cui la derivata non esiste. Si può quindi scrivere

$$\partial_{xx} f(\underline{x}) = \begin{cases} -y\sin xy & y>0 \\ 0 & y\le 0\end{cases} \qquad \partial_{yy} f(\underline{x}) = \begin{cases} -2\dfrac{x}{y^2}\cos xy + \dfrac{\sin xy}{y}(\dfrac{2}{y^2}-x^2) & y>0 \\ \nexists & y=0 \\ 0 & y<0\end{cases}$$

$$\partial_{xy} f(\underline{x}) = \begin{cases} -x\sin xy & y>0 \\ \nexists & y=0 \\ 0 & y<0\end{cases} \qquad \partial_{yx} f(\underline{x}) = \begin{cases} -x\sin xy & y>0 \\ \nexists & y=0 \\ 0 & y<0\end{cases}$$

4.7 $f_2(\underline{x})$: Fuori dall'asse delle ordinate la funzione è differenziabile tutte le volte che si vuole. Se $x\neq 0$ si ha $\partial_x f(\underline{x}) = \frac{y}{x}\cos xy - \frac{\sin xy}{x^2}$, $\partial_y f(\underline{x}) = \cos xy$, $\partial_{xy} f(\underline{x}) = -y\sin xy$. Sia ora $x=0$. La funzione è continua in ogni punto del tipo $(0,y)$ *ma la dimostrazione non consiste nel far vedere solamente che* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{x} = y$ *in quanto il precedente è un limite unidimensionale (ad y fissato)*. Indicando $Y_1 = \{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \ \mid y\neq 0\}$ e $Y_o = \{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \ \mid y=0\}$ abbiamo che $\mathbf{R}^2 = Y_1\cup Y_o$ e quindi per ogni insieme $A\subset\mathbf{R}^2$ si ha $A\subset Y_1\cup Y_o$. È chiaro che $\lim_{\underline{x}\to(0,y_o)} f|_{Y_o}(\underline{x}) = y_o$ e che $\lim_{\underline{x}\to(0,y_o)} f|_{Y_1}(\underline{x}) = y_o$. La prima è evidente in quanto $f|_{Y_o}(\underline{x}) = y$. La seconda è meno evidente. Sviluppando $\sin(xy)$ in serie nell'intorno di $x=0$ e considerando y come costante abbiamo $\sin(xy) = xy + o(x^2)$ e quindi $\frac{\sin(xy)}{x} - y_o = (y-y_o) + \frac{o(x^2)}{x}$ da cui si conclude che il limite $\underline{x}\to\underline{0}$ è 0. Se si fosse scelta la strada di sviluppare secondo Taylor la funzione di *due* variabili $\sin(xy)$ nell'intorno di $(x,y) = (0,y_o)$ si sarebbe ottenuto esattamente lo stesso polinomio ossia xy. Infatti $\lim_{(x,y)\to(0,y_o)}\frac{o(x^2)}{x^2+y^2} = 0$ e per *l'unicità* contenuta nel `Teorema 7.6` il polinomio che si otterrebbe facendo le derivate rispetto ad x ed y è lo stesso ossia xy.
Sia ora $A\subset\mathbf{R}^2$ è tale che $(0,y_o)\subset A'$. Essendo $A\subset Y_o\cup Y_1$ ne segue che $\lim_{\underline{x}\to(0,y_o)} f(\underline{x}) = y_o$.
Derivabilità:

$\partial_x f(0,y_o) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(t,y_o)-f(0,y_o)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\frac{\sin ty_o}{t}-y_o) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin ty_o - ty_o}{ty_o} = 0.$
$\partial_y f(0,y_o) = 1$ infatti $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(0,t+y_o)-f(0,y_o)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(t+y_o-y_o) = 1$ e quindi

$$\partial_x f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}\cos xy - \dfrac{\sin xy}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad \partial_y f(\underline{x}) = \begin{cases} \cos xy & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

Le derivate parziali sono continue ovunque. Infatti lo sono chiaramente nei punti che non stanno sull'asse delle y. Sull'asse delle y, per quanto riguarda ∂_x, si studia $\lim_{(x,y)\to(o,y_o)}|\frac{xy\cos xy - \sin xy}{x^2}|$. Il numeratore è maggiorabile per $|x|<1$ e $|y-y_o|<1$ con $|(\cos xy-1)xy+xy-\sin xy|\leq a|xy|^3$ per una opportuna (e calcolabile) costante a[6.7]) (se nel limite (x,y) appartiene all'asse delle x il valore della funzione è zero) e quindi la derivata parziale è continua. Un identico discorso può farsi per ∂_y e dunque la funzione è differenziabile ovunque avendo le derivate parziali continue ovunque. È immediato inoltre osservare che

$$\partial_{xx} f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}(\dfrac{2}{x^2}-y^2) - \dfrac{2y}{x^2}\cos xy & x\neq 0 \\ -\dfrac{y^3}{3} & x=0 \end{cases} \qquad \partial_{yy} f(\underline{x}) = \begin{cases} -x\sin xy & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$\partial_{xy} f(\underline{x}) = \begin{cases} -y\sin xy & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad \partial_{yx} f(\underline{x}) = \begin{cases} -y\sin xy & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

4.7 $f_3(\underline{x})$: È chiaro che la funzione è continua in tutti i punti che non stanno sull'asse delle ascisse.
Sia ora $\underline{x}_o = (x_o,0)$ un punto dell'asse delle x. Consideriamo ora la funzione $f(\underline{x}) \equiv -\frac{x}{2}$. Applicando la definizione di continuità $\forall\,\varepsilon\;\exists\,\delta_\varepsilon$ *t.c.* $\|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\delta_\varepsilon\ \wedge\ y\leq 0\ \Rightarrow\ |f(\underline{x})-f(\underline{x}_o)|<\varepsilon$ si ottiene che $|f(\underline{x})-f(\underline{x}_o)| = |-\frac{x}{2}+\frac{x_o}{2}|<\varepsilon$ diventa $|\frac{x-x_o}{2}|<\varepsilon$ e quindi $\delta_\varepsilon = 2\varepsilon$.
Consideriamo ora la funzione $f(\underline{x}) \equiv \frac{1-e^{xy^2}}{2y^2}$. Dobbiamo studiare l'espressione $|\frac{1-e^{xy^2}}{2y^2}+\frac{x_o}{2}|$. Il numeratore si riscrive come $1-e^{(x-x_o)y^2+x_oy^2} = 1-(1+x_oy^2+o(y^2))(1+y^2(x-x_o)+o(y^2)) = x_oy^2+o(y^2)$ e quindi $\lim_{(x,y)\to(x_o,0)}\frac{1-e^{xy^2}}{2y^2}+\frac{x_o}{2}=0$.
Quindi si arriva a $|f(\underline{x})+\frac{x_o}{2}|<\varepsilon$ certamente per $\|\underline{x}-\underline{x}_o\|<\delta^{(1)}_\varepsilon\ \wedge\ y>0$. Prendendo il più piccolo fra δ_ε e $\delta^{(1)}_\varepsilon$ si ha la continuità.
Derivabilità: Certamente fuori dall'asse x; $\partial_x f(x_o,0) = -\frac{1}{2}$ chiaramente.
$\partial_y f(x_o^+,0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(\frac{1-e^{t^2x_o}}{2t^2}+\frac{x_o}{2}) = 0$ e $\partial_y f(x_o^-,0) = \lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t}(-\frac{x_o}{2}+\frac{x_o}{2}) = 0$ e quindi la funzione è derivabile anche sull'asse delle x.
Differenziabilità: in questo caso eseguiamo il limite $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{(f(\underline{x}_o+\underline{h})-f(\underline{x}_o)-\partial f(\underline{x}_o)\cdot\underline{h})}{\|\underline{h}\|}$. $\underline{h}$ è un vettore centrato in $(x_o,0)$ e se $h_2>0$ allora si ha $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}(\frac{1-e^{h_2^2(x_o+h_1)}}{2h_2^2}+\frac{x_o}{2}+\frac{1}{2}h_1)\frac{1}{\|h\|} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}}(\frac{1-e^{h_2^2(x_o+h_1)}}{2h_2^2(x_o+h_1)}(x_o+h_1)+\frac{x_o}{2}+\frac{1}{2}h_1)\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$. Se $h_2\leq 0$ allora l'argomento del limite è identicamente nullo da cui la differenziabilità ovunque.

4.7 $f_4(\underline{x})$: Nei punti che non stanno sugli assi la funzione è differenziabile. Sia ora $P=(x_o,0)$ e cambiamo coordinate $x=x_o+\xi$, $y=\eta$ dimodoché il limite è stavolta per $\xi\to 0$ ed $\eta\to 0$ (come y del resto per cui lasciamo y nel prosieguo).
$|f(\underline{x})-f(\underline{0})| = |f(x_o+\xi,y)| = |(x_o+\xi)^2\arctan\frac{y}{x_o+\xi}-y^2\arctan\frac{x_o+\xi}{y}|\leq\frac{|y|}{|x_o+\xi|}(x_o+\xi)^2+y^2\frac{\pi}{2}\leq$ $\leq\frac{\pi}{2}y^2+|y||x_o+\xi|$. Se $|y|\leq 1$ e $\xi\leq|x_o|$ allora si può maggiorare con $|y|(2|x_o|+\frac{\pi}{2})\leq(2|x_o|+\frac{\pi}{2})\sqrt{\xi^2+y^2}$ per cui $\delta_\varepsilon=\min\{1,|x_o|,\frac{\varepsilon}{2|x_o|+\frac{\pi}{2}}\}$. Essendo $f(x,y)=-f(y,x)$ la dimostrazione vale anche per i punti che stanno sull'asse delle y.

(6.7) Lo studente/ssa dovrebbe calcolarla o meglio darne una stima

Derivabilità. $\partial_x f(\underline{x}) = -y + 2x\arctan\frac{y}{x}$ e $\partial_y f(\underline{x}) = x - 2y\arctan\frac{x}{y}$ nei punti (x,y) in cui $x\neq 0 \wedge y\neq 0$. Se $(x,y)=(x_o,0)$ e volendo calcolare la derivata direzionale generica si ha $\partial_{\underline{h}} f(x_o,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x_o+th_1, th_2) - f(x_o,0)] =$
$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[(x_o+th_1)^2\arctan\frac{th_2}{x_o+th_1} - t^2h_2^2\arctan\frac{x_o+th_1}{th_2}\Big] =$
$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}x_o^2\frac{th_2}{x_o+th_1} = x_oh_2$ e quindi $\partial_{\underline{h}} f(x_o,0) = x_oh_2 \Rightarrow \partial_x f(x_o,0)=0$ e $\partial_y f(x_o,0)=x_o$.

$$\partial_x f(\underline{x}) = \begin{cases} -y+2x\arctan\dfrac{y}{x} & x\neq 0 \\ -y & x=0 \end{cases} \qquad \partial_y f(\underline{x}) = \begin{cases} x-2y\arctan\dfrac{x}{y} & y\neq 0 \\ x & y=0 \end{cases}$$

Si può verificare che le derivate parziali sono continue sugli assi cartesiani per cui la funzione è differenziabile anche sugli assi cartesiani. Bisogna far vedere che
$\lim_{\underline{x}\to(x_o,0)}\partial_y f(\underline{x}) = x_o$ e $\lim_{\underline{x}\to(0,y_o)}\partial_y f(\underline{x}) = 0$. Essendo
$|\partial_y f(\underline{x}) - x_o| = |x - x_o - 2y\arctan\frac{x}{y}| \le \varepsilon$ per $\sqrt{(x-x_o)^2+y^2}\le\delta_\varepsilon$ la continuità in $(x_o,0)$ è dimostrata. Un analogo argomento (anche più facile) consente di dimostrare che $\partial_y f$ è continua in $(0,y_o)$ e quindi è ivi continua anche $\partial_x f$.
Per quel che riguarda le derivate seconde si ha

$$\partial_{xx} f(\underline{x}) = \begin{cases} -\dfrac{2xy}{x^2+y^2} + 2\arctan\dfrac{y}{x} & xy\neq 0 \vee y=0 \\ \nexists & x=0\wedge y\neq 0 \end{cases}$$

$$\partial_{yy} f(\underline{x}) = \begin{cases} -2\arctan\dfrac{x}{y} + \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & xy\neq 0 \vee x=0 \\ \nexists & y=0\wedge x\neq 0 \end{cases}$$

$$\partial_{yx} f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & y\neq 0 \ \vee \ (y=0\wedge x\neq 0) \\ -1 & x=0 \ \wedge \ y=0 \end{cases}$$

$$\partial_{xy} f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x\neq 0 \ \vee \ (x=0\wedge y\neq 0) \\ 1 & x=0\wedge y=0 \end{cases}$$

Se ne deduce che $\partial_{xy} f(\underline{0}) = +1 = -\partial_{yx} f(\underline{0})$ per cui le derivare miste non sono uguali nell'origine. Inoltre si ha

$$\partial_{xxx} f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{-4y^3}{(x^2+y^2)^2} & x\neq 0 \\ \nexists & x=0 \end{cases} \qquad \partial_{yyy} f(x,y) = -\partial_{xxx} f(y,x) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{(x^2+y^2)^2} & y\neq 0 \\ \nexists & y=0 \end{cases}$$

$$\partial_{yxx} f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} & x\neq 0 \\ \nexists & x=0 \end{cases} \qquad \partial_{xyy} f(x,y) = -\partial_{yxx}(y,x) = \begin{cases} \dfrac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} & y\neq 0 \\ \nexists & y=0 \end{cases}$$

$$\partial_{xyx} f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} & x\neq 0\wedge y\neq 0 \\ 0 & x=0\vee y=0 \end{cases} \qquad \partial_{yxy} f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} & y\neq 0\wedge x\neq 0 \\ 0 & x=0\vee y=0 \end{cases}$$

$$\partial_{yyx} f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \vee y = 0 \end{cases} \qquad \partial_{xxy} f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} & x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo ad esempio $\partial_{yxx} f(x_o,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\partial_{xx} f(x_o+t,0) - \partial_{xx} f(x_o,0)) = \lim_{t\to 0}(0-0) = 0$ e $\partial_{xyx} f(0,y_o) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\partial_{yx} f(t,y_o) - \partial_{yx} f(0,y_o)) = \lim_{t\to 0}(\frac{t^2-y^2}{t^2+y^2}+1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{2t^2}{t^2+y^2} = 0$

4.7 $f_5(\underline{x})$: Poiché $\lim_{x\to 0} f(x, x-x^3) = \pm\infty$ la funzione non è continua nell'origine

La funzione è utile per mettere in evidenza un errore commesso sovente dallo studente alle prime armi. Può infatti accadere che si scelga di passare a coordinate polari ottenendo la seguente stima per $\underline{x} \neq 0$ $|f(\underline{x})| \leq \rho/|\sin\theta - \cos\theta|$; a questo punto sarebbe un errore passare al limite per $\rho \to 0$ concludendo che il limite è zero ed indicando come continua in $\underline{x} = 0$ la funzione. In tal modo si tralascia di considerare che il denominatore può annullarsi. Ciò che sembra far funzionare la dimostrazione della continuità è il fatto che a numeratore vi è una potenza positiva di ρ. In realtà è però impossibile maggiorare ulteriormente $\frac{\rho}{|\cos\theta - \sin\theta|}$ eliminando la dipendenza da θ ed infatti la funzione non è continua.

4.7 $f_6(\underline{x})$: Se $(x,y) \in \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y < 0 \ \vee \ (y > 0 \wedge x \neq 0)\}$ allora la funzione è differenziabile. Infatti se $y < 0$ allora la funzione è identicamente nulla in un intorno del punto e dunque è differenziabile.
Se $y > 0$ allora $\frac{y}{x^2}$ è differenziabile e e^t è derivabile come funzione di una variabile e dunque $e^{-\frac{y}{x^2}}$ è differenziabile. Cominciamo da $p = (0, y_o)$ ($y_o > 0$ chiaramente).
Continuità: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon$ t.c. $\|(x,y) - (0,y_o)\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - f(0,y_o)| < \varepsilon$. Essendo $te^{-t} \leq 1$ per ogni $t \geq 0$ si ha $ye^{-\frac{y}{x^2}} \leq x^2 \leq x^2+y^2$ e quindi $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Se $(x,y) = (0,\overline{y})$ allora $f(0,\overline{y}) = f(0,y) = 0$ e quindi $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ va ugualmente bene in quanto se $|y| < \delta_\varepsilon$ si ha $f(0,\overline{y}) - f(0,y_o) = 0 < \varepsilon$.
Derivabilità: Chiaramente $\partial_y f(0,y_o) = 0$. La derivata parziale rispetto ad x dà $\partial_x f(0,y_o) = \lim_{t\to 0}(f(t,y_o) - f(0,y_o)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} y_o e^{-\frac{y_o}{t^2}} = 0$ usando la maggiorazione di prima.
Differenziabiltà: (sempre in $(0,y_o)$ chiaramente e $y_o > 0$). Sia $\underline{h} = (h_1,h_2)$ un vettore in $\mathbf{R}^2$ tale che $\|h\| \leq |y_o|$ in quanto vogliamo che il punto $(0,y_o)+\underline{h}$ stia nel semipiano superiore. Dobbiamo studiare quindi $\lim_{\underline{h}.\to \underline{0}} \|\underline{h}\|^{-1}\big(f(h_1, y_o+h_2) - f(0,y_o)\big)$. Il modulo può essere maggiorato con (usando $t^2e^{-t} \leq 1$ per $0 \leq t \leq t_o$ e t_o calcolabile e $|y_o+h_2| \geq \frac{1}{2}|y_o|$ per $|h_2| \leq \frac{1}{2}|y_o|$) $|h_1|^{-1}|y_o+h_2|e^{-\frac{y_o+h_2}{h_1^2}} \leq \frac{|y_o+h_2|}{|h_1|^2}\frac{h_1^4}{|y_o+h_2|^2}$ che a sua volta è maggiorabile con $\frac{2h_1^2}{|y_o|}$ che tende a zero quando $\|\underline{h}\| \to 0$. Dunque in $P = (0,y_o)$ e $y_o \neq 0$ la funzione è differenziabile.
Sia ora $P = \underline{0}$. La maggiorazione $|h_2| \leq \frac{1}{2}|y_o|$ non è realizzabile e quindi bisogna tornare allo studio di $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{h}) - f(\underline{0}) - \underline{\partial} f(\underline{0})\cdot\underline{h})$. È evidente che $\underline{\partial} f(\underline{0}) = \underline{0}$ per cui il limite diventa $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|} f(\underline{h})$. Se $h_2 \leq 0$ la precedente espressione vale 0 per ogni valore di h_1 per cui si può dire che se $h_2 \leq 0$ e $\|\underline{h}\|$ qualsiasi valore si ha $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}|f(\underline{h})| < \varepsilon$.

Se invece $h_2 > 0$ allora il limite diventa $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{h_2}{\|\underline{h}\|}e^{-\frac{h_2}{h_1^2}} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{h_2}{h_1^2}\frac{h_1^2}{\|\underline{h}\|}e^{-\frac{h_2}{h_1^2}} \leq$

$\leq \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{h_1^2}{\|\underline{h}\|}L \leq \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{h_1^2}{|h_1|}L \leq \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} |h_1|L = 0$ dove $L = \max_{x>0} xe^{-x}$. Ne segue che che se $\|\underline{h}\| < \frac{\varepsilon}{L}$ si ha $\frac{1}{\|\underline{h}\|}|f(\underline{h})| < \varepsilon$ per cui $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$. Dunque la funzione è differenziabile nell'origine e quindi è ivi anche continua.
Rimangono da studiare i punti del tipo $(x_o,0)$ con $x_o \neq 0$. Si verifica facilmente che la funzione è differenziabile anche in quei punti.

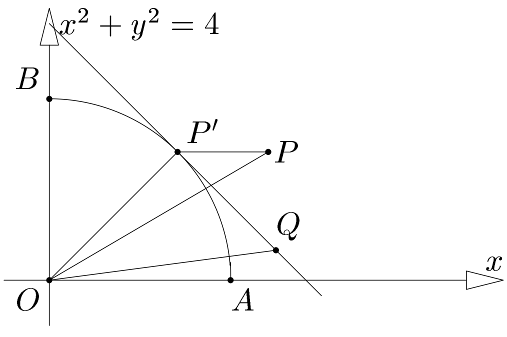
4.7 $f_7(\underline{x})$: Cambiamo variabili

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x} + k\pi,\ k\in\mathbf{Z},\ \text{se } \theta\in(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi) \end{cases}$$

e nelle nuove variabili la funzione si scrive

$$f(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) \doteq F(\rho,\theta) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-\rho^2}} & \rho < 1 \\ 0 & \rho\geq 1 \end{cases}$$

e quindi F dipende solo da ρ. La continuità, che nelle variabili (x,y) sarebbe $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}(f(\underline{x}_o+\underline{h})-f(\underline{x}_o)) = 0$, nelle variabili (ρ,θ) diventa $\lim_{\rho\to\rho_o}(F(\rho)-F(\rho_o)) = 0$ dove $\|\underline{x}_o\| = \rho_o$ e $\|\underline{x}_o+\underline{h}\| = \rho$. Se $\rho_o < 1$ oppure $\rho_o > 1$ il limite fa chiaramente 0 in quanto sono interessate due diverse funzioni ambedue continue. Se $\rho_o = 1$ si ha $\lim_{\rho\to 1^-} e^{\frac{-1}{1-\rho^2}} = 0$ e quindi la funzione è continua.
Per quanto concerne la derivabilità bisogna studiare i limiti $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(\underline{x}_o+t\underline{v})-f(\underline{x}_o))$ dove $\|\underline{v}\| = 1$ e $\underline{x}_o = (\rho_o\cos\theta_o, \rho_o\sin\theta_o)$ mentre $\underline{v} = (\cos\alpha,\sin\alpha)$. Per come è fatta la funzione se $\rho_o > 1$, prendendo $|t| < \rho_o - 1$, si ha che $\|\underline{x}_o+t\underline{v}\| > 1$ e quindi il limite fa chiaramente 0 ed analogamente se $\rho_o < 1$. Se $\rho_o = 1$ si ottiene $f(\underline{x}_o+t\underline{v}) = F(\|\underline{x}_o+t\underline{v}\|^2) = F(\|\underline{x}_o\|^2+|t|^2+2t(\underline{x}_o\cdot\underline{v}) = F(\rho_o^2+t^2+2t\rho_o(\cos\theta_o\cos\alpha+\sin\theta_o\sin\alpha)) = F(1+t^2+2t\cos(\theta_o-\alpha))$. La derivabilità si traduce in $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}F(1+t^2+2t\cos(\theta_o-\alpha))$. Se $\cos(\theta_o-\alpha) > 0$ allora $\|\underline{x}_o+t\underline{v}\| < 1$ per $t<0$ e $\|\underline{x}_o+t\underline{v}\| > 1$ per $t>0$. In tal caso $\frac{1}{t}F(1+t^2+2t(\cos\theta_o\cos\alpha-\sin\theta_o\sin\alpha)) \equiv 0$ per $t>0$ mentre per $t<0$ si ha $\frac{1}{t}e^{\frac{1}{(1+t^2+2t\cos(\theta_o-\alpha))-1}} = \frac{1}{t}e^{\frac{1}{t^2+2t\cos(\theta_o-\alpha)}}$ che tende a *zero* per $t\to 0^-$.
Se $\cos(\theta_o-\alpha) < 0$ allora $\|\underline{x}_o+t\underline{v}\| < 1$ per $t>0$ e $\|\underline{x}_o+t\underline{v}\| > 1$ per $t<0$. In tal caso $\frac{1}{t}F(1+t^2+2t(\cos\theta_o\cos\alpha-\sin\theta_o\sin\alpha)) \equiv 0$ per $t<0$ mentre per $t>0$ si ha $\frac{1}{t}e^{\frac{1}{(1+t^2+2t\cos(\theta_o-\alpha))-1}} = \frac{1}{t}e^{\frac{1}{t^2+2t\cos(\theta_o-\alpha)}} \to 0$ per $t\to 0^+$.
Se $\cos(\theta_o-\alpha) = 0$ allora $\|\underline{x}_o+t\underline{v}\| > 1$ per ogni valore di $|t|$ e la funzione diventa $\frac{1}{t}F(1+t^2) = \frac{1}{t}e^{\frac{1}{t^2}} \to \pm\infty$ per $t\to 0^{\pm}$.
Ne segue che dato un punto $\underline{x}_o$ tale che $\|\underline{x}_o\| = 1$ non esiste la derivata nella direzione ortogonale al vettore $\underline{x}_o$ (si sta qui indicando con lo stesso simbolo tanto il punto di coordinate $\underline{x}_o = (x_o, y_o)$ quanto il vettore che ha come punto di applicazione l'origine e come estremo il punto $\underline{x}_o$).
La funzione è differenziabile per $\rho_o \neq 1$ mentre non lo è per $\rho_o = 1$. Il seguente disegno esemplifica la situazione



$\overrightarrow{OP'} \equiv \underline{x}_o \quad \overrightarrow{P'P} \equiv t\underline{v}_1 \quad \overrightarrow{OP} \equiv \underline{x}_o + t\underline{v}_1 \quad \widehat{P'OA} = 45°$
$\overrightarrow{P'Q} \equiv t\underline{v}_2 \quad \overrightarrow{OQ} \equiv \underline{x}_o + t\underline{v}_2 \quad \widehat{PP'Q} = -45°$
$0 < \widehat{POA} < 45° \quad A \equiv (2,0) \quad B \equiv (0,2)$

4.7 $f_9(\underline{x})$: La funzione è x^3+2y^2 sull'insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2 \mid x\geq 0 \ \wedge\ |y|\leq x^{3/2}\}$. $x^3+2y^2 = x^3+y^4$ per $\underline{x} = (0,0)$, $\underline{x} = (2^{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{2})$. È facile mostrare che in tali punti la funzione è continua. Dunque la funzione non è continua nei punti che stanno sulle curve di equazione $|y| = x^{\frac{3}{2}}$ e che hanno ascissa positiva ma diversa da 0 e $2^{\frac{2}{3}}$.
Derivabilità. In $(0,0)$ per la derivata rispetto ad x si ha: $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(f(t,0)-f(0,0)) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\frac{t^3}{t} = 0$ e $\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t}(f(t,0)-f(0,0)) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\frac{t^3}{t} = 0$. Per quella rispetto ad y si ha $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(0,t)-f(0,0)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^4}{t} = 0$.

In $(2^{\frac{2}{3}}, 2) = (x_o, y_o)$ si ha $\partial_y f(x_o, y_o^-) = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(f(x_o, y_o+t) - f(x_o, y_o)) = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(x_o^3 + 2(y_o+t)^2 - x_o^3 - 2y_o^2) = 4y_o$
$\partial_y f(x_o, y_o^+) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(f(x_o, y_o+t) - f(x_o, y_o)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(x_o^3 + (y_o+t)^4 - x_o^3 - 2y_o^2) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(y_o^4 - 2y_o^2 + 4ty_o^3) = 4y_o^3$ per cui la funzione non è derivabile. Essendo simmetrica rispetto alla trasformazione $x \to x$ e $y \to -y$ lo stesso risultato lo si ottiene per il punto $(x_o, -y_o)$. Inoltre si ha, ma non lo dimostriamo, che $\partial_x f(x_o^+, \pm y_o) = \partial_x f(x_o^-, \pm y_o)$ per cui la funzione ha la derivata parziale rispetto all'asse x.

Differenziabilità. Essendo $\lim_{\underline{h}\to \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(h_1^3 + 2h_2^2) = \lim_{\underline{h}\to \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(h_1^3 + h_2^4) = 0$ la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Per quanto concerne la concavità si può dire che per $|y| < x^{3/2}$ $(x > 0,)$ la matrice hessiana è $\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e quindi è definita strettamente positiva. Dunque nell'insieme $\{y^2 < x^3\}$ la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto (è convessa secondo la definizione del libro di testo).

Se $y^2 > x^3$ allora la matrice hessiana è $\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$, e per $y = 0$ si può solo avere $x < 0$. Dunque per $x > 0$ e $y \neq 0$ la concavità è rivolta verso l'alto mentre se $x < 0$ e $y \neq 0$ i punti non hanno concavità definita.

Se ora ci mettiamo in un punto $P \equiv (x_o, 0)$ con $x_o < 0$ la matrice hessiana è $\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, che è semidefinita negativa ma la concavità non è definita. Infatti vediamo che il piano tangente ha equazione $z(\underline{x}) = x_o^3 + 3x_o^3(x - x_o)$ e quindi si ha $f(\underline{x}) = z(\underline{x}) + (x-x_o)^2(3x_o + (x-x_o)) + y^4$ da cui se si fissa $y = 0$ e ci si muove lungo l'asse delle x di una quantità piccola (tanto più piccola quanto più x_o è vicino a 0) si ha $f(\underline{x}) < z(\underline{x})$ mentre se si fissa $x = x_o$ e ci si muove lungo l'asse $x = x_o$ si ottiene $f(\underline{x}) > z(\underline{x})$ e quindi effettivamente se ne conclude che in P la concavità non è definita.

Una analisi a parte è necessaria per i punti che stanno sulle funzioni $y = \pm x^{3/2}$. In $(0,0)$ la funzione è differenziabile ma non è due volte differenziabile per cui non ha senso scrivere la matrice hessiana nell'origine. Il piano tangente è dato da $z(\underline{x}) = 0$ da cui segue che la funzione, per ogni $(x,y) \in \{y^2 \le x^3\}$, $f(\underline{x}) \ge y^2$ e quindi sta sopra il piano tangente nell'origine mentre se $y^2 > x^3$ la funzione sta sopra o sotto il piano tangente a seconda che ci si muova lungo l'asse delle y oppure delle x e quindi la concavità non è definita.

Se $y = \pm x^{3/2}$ $x \neq 0$, $x \neq 2^{2/3}$ non può esistere un intorno per quanto piccolo in cui la funzione ha concavità definita in quanto non è ivi continua ed il `Teorema 7.7` ci dice che se la funzione è convessa è continua (vedi l'esercizio **27.7*****). La stessa cosa avviene sui punti del tipo $(x, \pm x^{3/2})$ e $x \neq 2^{2/3}$ in quanto non è possibile ricavare un insieme aperto contenente quei punti in cui la funzione è continua. Peraltro la stessa considerazione poteva farsi per l'origine ed il conto effettuato non fa altro che confermare quanto detto dal `Teorema 7.7`.

4.7 $f_{10}(\underline{x})$: Basta scrivere la funzione come $\int_0^y dz \sin\frac{1}{z} - \int_0^x dz \sin\frac{1}{z}$ ed osservare che $\int_0^y dz \sin\frac{1}{z}$ è derivabile in x per ogni valore $x = 0$ compreso. La dimostrazione che è derivabile anche in $x = 0$ si trova nella risoluzione dell'esercizio **22.8**.

6.7 1) Essendo la funzione differenziabile si ha $D_{\underline{v}_\alpha}(x,y) = \cos\alpha\partial_x f(\underline{x}) + \sin\alpha\partial_y f(\underline{x})$ e quindi $D_{\underline{v}_\alpha}(x,y) = \cos\alpha(4x-y) + \sin\alpha(2y-x)$ e se $\underline{x} = (-1,2)$ si ottiene $q(\alpha) \doteq 5\sin\alpha - 6\cos\alpha$. $q'(\alpha) = 5\cos\alpha + 6\sin\alpha = \cos\alpha(5 + 6\tan\alpha)$ e quindi la funzione ha un minimo per $\alpha = \arctan(-\frac{5}{6})$. $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{61}}$ mentre $\sin\alpha = \frac{-5}{\sqrt{61}}$ da cui $\underline{v}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{61}}(6,-5)$

Poiché $D_{\underline{v}_\alpha}(x,y) = \underline{\partial} f(\underline{x}) \cdot \underline{v_\alpha}$ e tale espressione è minima quando $\underline{v_\alpha}$ è diretto secondo $\underline{\partial} f(\underline{x})$ ma ha verso opposto. Dunque essendo $\underline{\partial} f(-1,2) = (-6,5)$ si ha che il vettore corrispondente alla derivata direzionale minima è dato da $\frac{1}{\sqrt{61}}(6,-5)$

Il determinante della matrice hessiana è $8-\beta^2$ mentre la traccia è 6 per cui se $-2\sqrt{2} \le \beta \le 2\sqrt{2}$, usando il `punto i) del Teorema 7.11`, la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto ossia la funzione è convessa secondo la definizione data `all'inizio del capitolo 7.6)`. Se $|\beta| \ < 2\sqrt{2}$ la concavità non è definita.
Se $-2\sqrt{2} < \beta < 2\sqrt{2}$ la funzione è strettamente convessa
Se $|\beta| = \pm 2\sqrt{2}$ si ha $f(\underline{x}) = (\sqrt{2}x \mp y)^2$ e la concavità è rivolta verso l'alto. Infatti basta cambiare coordinate nel seguente modo $x' = x$, $y' = \sqrt{2}x \mp y$ e la funzione diventa $(y')^2$ da cui il risultato. Va detto però che se $\beta = -2\sqrt{2}$ la retta di equazione $y = \sqrt{2}x$ è una retta ogni punto della quale costituisce un minimo di ordinata 0 per la funzione (essendo la funzione differenziabile su ogni minimo il gradiente è nullo). Ogni altro punto che non sta sulla retta ha ordinata positiva. Se $\beta = 2\sqrt{2}$ la retta diventa $y = -\sqrt{2}x$. La esistenza di tale rette è la ragione per cui se $-2\sqrt{2} \le \beta \le 2\sqrt{2}$ allora la funzione è convessa e non *strettamente convessa*. Infatti il piano di equazione $z = 0$ è tangente alla funzione nel punto $(0,0)$ e "tocca" la funzione in tutti i punti della retta $y = \pm\sqrt{2}x$. La relazione di convessità $f(\underline{x}) \ge f(\underline{0}) + \underline{\partial} f(\underline{0})\underline{x}$ diventa $f(\underline{x}) \ge 0$ senza la possibilità di avere maggiore stretto.
Si può altresì dire che la esistenza della retta $y = \sqrt{2}x$ sulla quale la funzione assume lo stesso valore minimo è motivo sufficiente per affermare che il determinante della matrice hessiana è nullo ossia che almeno uno degli autovalori è nullo. Sia infatti $\underline{x} = (x, \sqrt{2}x)$ un punto della retta in questione e sia $\underline{h}$ un vettore tale che $\underline{x} + \underline{h}$ appartiene alla stessa retta. Abbiamo $f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + \underline{\partial} f(\underline{x})\cdot\underline{h} + \frac{1}{2}(\underline{h}, H(\underline{x})\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2) = \frac{1}{2}(\underline{h}, H(\underline{x})\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2) = 0$ per $\|\underline{h}\| \to 0$ e $\underline{h} = \mu(1,\sqrt{2})\sqrt{3},$. Ne segue che $(\underline{h}, H(\underline{x})\underline{h}) = 0$. La matrice è simmetrica per cui decomponiamo $\underline{h}$ secondo i suoi autovettori ossia $\underline{h} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2$ $(c_1 \cdot c_2 \ne 0)$ corrispondenti agli autovalori λ_1 e λ_2. $(\underline{h}, H(\underline{x})\underline{h}) = c_1^2\lambda_1 + c_2^2\lambda_2 = 0$ (gli autovettori sono normalizzati ad 1). Dobbiamo subito scartare l'ipotesi che $\lambda_1\cdot\lambda_2 > 0$ e $\lambda_1\cdot\lambda_2 < 0$ in quanto è contraddetta nei fatti. Rimane $\lambda_1\cdot\lambda_2 = 0$ che contempla i seguenti sottocasi: 1) $\lambda_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_1 \ne 0$, 2) $\lambda_2 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 \ne 0$, 3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ne segue che almeno uno degli autovalori è nullo.

2) $\partial_x f(x,y) = 2(x+y) - 4x^3$, $\partial_y f(x,y) = 2(x+y) - 4y^3$, $\partial_{xx} f(x,y) = 2 - 8x^2$, $\partial_{yy} f(x,y) = 2 - 8y^2$, $\partial_{xy} f(x,y) = 2$. Gli unici punti critici sono $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$. La matrice hessiana è $\begin{pmatrix} 2-8x^2 & 2 \\ 2 & 2-8y^2 \end{pmatrix}$; il suo determinante è $D(x,y) = (2-8x^2)(2-8y^2) - 4$. $D(1,1) > 0$ e $D(-1,-1) > 0$ per cui sono dei massimi essendo $\partial_{xx} f(1,1) = -6 = \partial_{xx} f(-1,-1) = -6$. Essendo $D(0,0) = 0$ non possiamo dire nulla se non che non può essere un massimo in quanto uno degli autovalori della matrice è $\lambda = 4$. Siccome $f(x,x) = 4x^2 - 2x^4$ e $f(x,-x) = -2x^4$ segue che è una sella.

7.7 i) $\partial_x f(1,1) = \alpha x^{\alpha-1}y^\beta + 2|_{(1,1)} = 2+\alpha$, $\partial_y f(1,1) = \beta y^{\beta-1}x^\alpha|_{(1,1)} = \beta$ e quindi il piano tangente è $z = (2+\alpha)x + \beta y + 1 - \alpha - \beta$ ii) $\partial_{xx} f(\underline{x}) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta$, $\partial_{yy} f(\underline{x}) = \beta(\beta-1)y^{\beta-2}x^\alpha$, $\partial_{xy} f(\underline{x}) = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$, $\partial_{yx} = \partial_{xy}$. Tenendo in mente la matrice 2×2 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, la matrice hessiana è tale che $A = \partial_{xx} f$, $B = \partial_{xy} f$, $C = \partial_{yx} f$, $D = \partial_{yy} f$. Il suo primo termine è positivo. Infatti $\alpha(\alpha-1) > 0$ in quanto $\alpha < 0$ ed inoltre $x^{\alpha-2}y^\beta > 0$ se x appartiene ad un intorno abbastanza piccolo del punto $(1,1)$. Il determinante è $x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}\alpha\beta(1-\alpha-\beta)$ ed è positivo per le stesse ragioni. Dunque la funzione ha la convessità rivolta *strettamente* verso l'alto in ogni punto dell'insieme $\|(x,y) - (1,1)\| < \frac{1}{2}$. iii) L'esercizio chiede in pratica di trovare i valori di α e β per cui la funzione ha la concavità rivolta strettamente verso il basso in un intorno del punto $(1,1)$. La relazione $f(\underline{x}) < ax + by + c$ in pratica è $f(\underline{x}) < f(\underline{x}_o) + \underline{\partial} f(\underline{x}_o)(\underline{x} - \underline{x}_o)$ con $\underline{x}_o = (1,1)$. Basta che sia $\alpha(\alpha-1) < 0$ e $\alpha\beta(1-\alpha-\beta) > 0$ da cui il risultato.
I casi $\alpha = 0$, $\beta = 0$, e $\alpha\cdot\beta > 0$ $\alpha+\beta = 1$ vanno considerati separatamente. Infatti in questi casi la matrice hessiana ha determinante nullo ed il `Teorema 7.11 ii)` nulla ci dice sulla sua concavità o convessità *stretta*. Se $\alpha = 0$ deve verificarsi la relazione $y^\beta \ < \beta y + 1 - \beta$ che è

certamente vera per $0<\beta<1$ ed analogamente per $\beta=0$. Tale relazione ci dice che la funzione y^β ha la concavità *strettamente* rivolta verso il basso in un intorno di $y=1$.
La stessa cosa accade se $\beta=0$
Se invece $0<\alpha+\beta=1$ deve verificarsi la relazione $x^\alpha y^{1-\alpha}<\alpha x+(1-\alpha)y$ che per $x=y$ opportuni in un qualsiasi intorno di $(1,1)$ non è vera. Quindi non può esistere l'intorno $U\ni(1,1)$ tale che $f(\underline{x})<ax+by+c$ per $\underline{x}\in U\backslash\{(1,1)\}$.

8.7 i): dobbiamo risolvere la disequazione $|1-xye^{y-x^2}|<\varepsilon$ al variare di (x,y) in un intorno del punto $(1,1)$. $|1-xye^{y-x^2}|<|1-(x-1)ye^{1-x^2}e^{y-1}-ye^{1-x^2}e^{y-1}|=|1-(x-1)ye^{1-x^2}e^{y-1}-(y-1)e^{1-x^2}e^{y-1}-e^{1-x^2}e^{y-1}|\le$
$\le|1-xye^{y-x^2}|+|x-1|\,|y|e^{1-x^2}e^{y-1}+|y-1|e^{1-x^2}e^{y-1}$. Ora $e^{y-1}=1+(y-1)+\frac{1}{2}e^c(y-1)^2$ e prendendo $0<y<2$ si ha $-1<c<1$ per cui $e^c<e$. Inoltre $e^{1-x^2}=1+(1-x^2)+\frac{1}{2}e^b(1-x^2)^2$ e prendendo $0<x<1$ si ha $1<b<3$ per cui $e^b<e^3$.
$e^{1-x^2}e^{y-1}=1+(y-1)+(1-x^2)+\frac{1}{2}e^c(y-1)^2e^{1-x^2}+\frac{1}{2}e^b(1-x^2)^2e^{y-1}$ da cui discende la stima
$|1-e^{1-x^2}e^{y-1}|\le|y-1|+|1-x||1+x|+\frac{1}{2}e^4(y-1)^2+\frac{1}{2}e^4(1-x^2)^2\le|y-1|+3|1-x|+\frac{1}{2}e^4(y-1)^2+\frac{1}{2}9e^4(1-x)^2\le(1+\frac{e^4}{2})|y-1|+(3+\frac{9}{2}e^4)|1-x|$ e quindi
$|1-xye^{y-x^2}|\le(1+\frac{e^4}{2})|y-1|+(3+\frac{9}{2}e^4)|1-x|+2e^4|x-1|+e^4|y-1|\le\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}2\sqrt{2}(3+2e^4+\frac{9}{2}e^4)<\varepsilon$ se
$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}(3+2e^4+\frac{9}{2}e^4)}$ e quindi $\delta_\varepsilon=\min\{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}(3+2e^4+\frac{9}{2}e^4)},1\}$.

ii): $\partial_x f(\underline{x})=-ye^{y-x^2}+2x^2ye^{y-x^2}=0$ ossia $2yx^2-y=0$ e quindi $y=0$ oppure $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\partial_y f(\underline{x})=-xe^{y-x^2}-xye^{y-x^2}=-xe^{y-x^2}(1+y)=0$ e quindi se $y=0$ si ha $x=0$ mentre se $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha $y=-1$. $\partial_{xx}f(\underline{x})=2xye^{y-x^2}(-2x^2+3)$, $\partial_{yy}f(\underline{x})=-xe^{y-x^2}(2+y)$, $\partial_{xy}f(\underline{x})=-e^{y-x^2}(1+y)(2x^2-1)$. La matrice hessiana calcolata in $(0,0)$ dà $H(0,0)=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$, ed essendo il determinante minore di zero l'origine è un punto di sella. Inoltre nei due altri punti critici si ha $H(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},-1)=\begin{pmatrix}\pm\frac{4}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{2}}&0\\0&\mp\frac{4}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}$, ossia altre due selle.

iii): $z=e^{-2}-(x-1)e^{-2}$ e quindi è un piano parallelo al piano individuato dagli assi x e z.

iv) $f(\underline{x})=\sum_{|\underline{k}|\ge0}\frac{1}{\underline{k}!}\frac{\partial^{|\underline{k}|}f}{\partial\underline{x}^{\underline{k}}}|_{\underline{x}_o}(\underline{x}-\underline{x}_o)^{\underline{k}}$ ed alla luce di tale formula si ha $f(\underline{x})=-xy(1+y)+o(|x|^3)$. La formula precedente va interpretata nel seguente modo: se $\underline{k}=(k_1,k_2,\dots,k_l)$ è un vettore ad l componenti intere o nulle dove l è il numero di variabili della funzione in questione, si definisce
$|\underline{k}|=\sum_{i=1}^l k_i$, $\qquad\sum_{|k|\ge1}=\sum_{k_1=1}^{|\underline{k}|}\sum_{k_2=1}^{|\underline{k}|-k_1}\sum_{k_3=1}^{|\underline{k}|-k_1-k_2}\dots\sum_{k_{l-1}=1}^{|\underline{k}|-|k_1|-|k_2|-\dots-|k_{l-2}|}$,
$\frac{1}{\underline{k}!}=\frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_l!}$
$\frac{\partial^{|\underline{k}|}f}{\partial\underline{x}^{\underline{k}}}=\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_l}f}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\dots\partial x_l^{k_l}}$, $\qquad(\underline{x}-\underline{x}_o)^{\underline{k}}=(x_1-(x_o)_1)^{k_1}(x_2-(x_o)_2)^{k_2}\dots(x_l-(x_o)_l)^{k_l}$

9.7 Si ha $E(a,b)=\sum_{i=1}^n[ax_i+b-y_i]^2$; vogliamo minimizzare tale funzione rispetto ad a e b per cui $E_a=2\sum_{i=1}^n x_i[ax_i+b-y_i]=0$, $E_b=2\sum_{i=1}^n[ax_i+b-y_i]=0$ ed inoltre calcoliamo $E_{aa}=2\sum_{i=1}^n x_i^2$, $E_{bb}=2n$, $E_{ab}=2\sum_{i=1}^n x_i$, per cui la matrice hessiana non dipende da a e b ed il suo determinante è $4n\sum_{i=1}^n x_i^2-4(\sum_{i=1}^n x_i)^2$ e circa il segno di tale espressione può essere utile l'esercizio **1.1.3** -quinto del gruppo- da cui si evince che è positivo. Essendo E_{aa} positivo se ne conclude che tutti gli eventuali punti critici della funzione sono dei minimi (essendo il sistema $E_a=E_b=0$ lineare in a e b si avrà un unico punto critico). La soluzione è data da

$b = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n y_i - a\sum_{i=1}^n x_i)$ e $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)^2}$. Se si indica con $x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ e $y^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$ si ha che $b = y^* - ax^*$.

10.7 $f(0,y) = y^2$ da cui l'origine è un minimo su tale restrizione. $f(x,mx) = x^2(3x^2 - 4mx + m^2)$, $f'(x) = 2x(6x^2 - 6mx + m^2)$ da cui la funzione è decrescente per $x < 0 \ \vee \ x_-(m) < x < x_+(m)$ dove $x_\pm = \frac{3m \pm \sqrt{3m^2}}{6}$ e crescente per $0 < x < x_-(m) \ \vee \ x > x_+(m)$ da cui viene fuori che la funzione di x ottenuta ha un minimo nell'origine. Del resto scrivendo $f(\underline{x}) = (2x^2 - y)^2 - x^4$ e dunque si può risolvere la disequazione $f(\underline{x}) > 0$ ossia $(2x^2 - y)^2 > x^4$ ossia $|2x^2 - y| > x^2$. Se $2x^2 > y$ la disequazione diventa $2x^2 - y > x^2$ e quindi $y < x^2$ da cui si evince che se $\underline{x} \in \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y < x^2\}$ allora $f(\underline{x}) > 0$. Se invece $2x^2 < y$ allora la disequzione diventa $-2x^2 + y > x^2$ ossia $y > 3x^2$ e quindi se $\underline{x} \in \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y > 3x^2\}$ $f(\underline{x}) > 0$. Dunque se $\underline{x} \in \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 < y < 3x^2\}$ $f(\underline{x}) < 0$. Ne segue che la funzione ha in $(0,0)$ una sella. Questo esempio rientra nel `punto vi) del Teorema 7.13)` essendo la matrice hessiana semidefinita positiva.

11.7 $\partial_x f(\underline{x}) = y(1 - y^2 - 3x^2)$, $\partial_y f(\underline{x}) = x(1 - x^2 - 3y^2)$, $\partial_{xx} f(\underline{x}) = -6xy$, $\partial_{yy} f(\underline{x}) = -6xy$ $\partial_{xy} f(\underline{x}) = 1 - 3x^2 - 3y^2$ $\partial_x f(\underline{x}) = 0$ per $y = 0$ oppure $y^2 = 1 - 3x^2$. Se $y = 0$ dalla derivata rispetto ad y otteniamo $x(1 - x^2) = 0$ ossia $x = 0$ e $x = \pm 1$ per cui i punti critici sono dati da $P = (0,0)$, $R_+ = (1,0)$, $R_- = (-1,0)$. Se $y^2 = 1 - 3x^2$ si ha invece $1 - x^2 - 3(1 - 3x^2) = 0$ ossia $x = \frac{\pm 1}{2}$ per cui i punti critici sono dati da $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P_2 = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$, $P_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$, $P_4 = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$. Dalla matrice hessiana viene fuori che P_1 e P_3 sono dei massimi relativi e $f(P_1) = f(P_3) = \frac{1}{8}$ mentre P_2 e P_4 sono dei minimi relativi e $f(P_2) = f(P_4) = -\frac{1}{8}$. $R_\pm$ e $Q_\pm$ sono selle. Essendo $f(1,1) = f(-1,-1) = -1 < -\frac{1}{8}$ sono punti di minimo assoluto mentre $f(1,-1) = f(-1,1,) = 1 > \frac{1}{8}$ e quindi sono massimi assoluti. Si noti che i vertici del quadrato non sono punti critici.

12.7 Basta fare le derivate ed esaminare la matrice hessiana. Per il punto $(0,0)$ di f_5 il determinante è nullo ma basta osservare che $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$ per minorare.....

13.7 i) Continuità: uguagliando le due funzioni si ottengono come unici punti $(0,0)$ e $(1,1)$ ed inoltre impostando i calcoli che in questo caso eviteremo si ha la contiuità in quei punti. Dunque la funzione è continua in $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid y \neq x\} \cup \{(0,0)\} \cup \{(1,1)\}\}$.
ii) $z = 5x - 2y + 4$ (la funzione da considerare è $-2x^2 + 3xy - 2y^2$).
iii) Vediamo se la funzione è derivabile in $(0,0)$ (si badi che anche qualora lo sia ciò non è sufficiente a dire che esiste il piano tangente in quanto la funzione deve essere differenziabile). La derivata destra rispetto ad x in $(0,0)$ è $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} f(t,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(4t - 2t^2) = 4 = \partial_x f(0,0^+)$ mentre $\partial_x f(0,0^-) = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(-2t^2) = 0$ per cui la funzione non è derivabile nell'origine.
iv) Se $y > x$ si ha $\partial_x f = -4x + 3y$, $\partial_y f = 3x - 6y$, $\partial_{xx} f = -4$, $\partial_{yy} f = -6$, $\partial_{xy} f = 3$ da cui viene fuori che la matrice hessiana non dipende dal punto ed è uguale a $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, il cui determinante è dato da 15 ed essendo la traccia negativa la concavità è rivolta verso il basso. Se invece $y < x$ la matrice hessiana è $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e dunque tutti i punti non hanno concavità definita.

14.7 i) Calcoli ovvi ci danno la contintià nei punti $(0,0)$ e $(1,1)$ (lo studente/ssa verifichi ciò *e non si limiti ad uguagliare sulla curva* $x = y^3$ *le due funzioni che compongono l'esercizio*). Naturalmente è continua anche nei punti che non stanno sulla curva appena citata.
$\partial_x f(0^+,0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{t} = 0$ mentre $\partial_x f(0^-,0) =$
$= \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0)) = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{t} = 1$ per cui non è ivi derivabile. È immediato verificare che $\partial_y f(0,0^+) = \partial_y f(0,0^-) = 0$.
Inoltre $\partial_x f(1^+,1) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(f(t+1,1) - f(1,1)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}((t+1)^2 + 1 - 2) = 2$

e $\partial_x f(1^-,1) = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(f(t+1,1) - f(1,1)) = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}((t+1)+1-2) = 1$ per cui neanche in $(1,1)$ è derivabile.
Per quanto riguarda la differenziabilità la funzione è differenziabile ovunque tranne sulla curva $x = y^3$.
ii) Il piano tangente in $(0,0)$ non c'è in quanto non è ivi derivabile
iii) Se $x > y^3$ la matrice hessiana è $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 30y^4 \end{pmatrix}$ ed è quindi definita positiva per $y \neq 0$. È semidefinita positiva per ogni y da cui la concavità è rivolta verso l'alto.
Giusto per completezza verifichiamo che per (x_0, y_0) con $y_0 = 0$ la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto. La funzione meno il suo piano tangente è pari a $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \underline{\partial} f(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0), = y^6 + (x-x_0)^2$ che è sempre positiva per cui anche sul semiasse positivo delle x la concavità è rivolta verso l'alto.
Se $x < y^3$ la matrice hessiana è data da $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ ed è quindi semidefinita positiva se $y > 0$ e semidefinita negativa se $y < 0$. Dunque per $y > 0$ la funzione è convessa mentre per $y < 0$ la funzione è concava. Nei punti con $y = 0$, $x < 0$ la funzione meno il suo piano tangente cambia segno se ci si muove lungo l'asse delle y e non ha concavità definita.
Verifichiamo direttamente l'affermazione precedente. $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \underline{\partial} f(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0)$, calcolata in un punto (x_0, y_0) diventa $x + y^3 - x_0 - y_0^3 - (x-x_0) - 3y_0^2(y-y_0) = (y-y_0)(y^2+yy_0-2y_0^2)$. Sia ora $y_0 > 0$ per cui l'ultima quantità è positiva per $y > -2y_0$ e negativa per $y < -2y_0$. Ne segue che esiste un intorno di (x_0,y_0) in cui $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \underline{\partial} f(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0)$ è positiva ossia la concavità è rivolta verso l'alto
Se invece $y_0 < 0$ allora $(y-y_0)(y^2+yy_0-2y_0^2) > 0$ per $y > -2y_0$ e quindi la funzione ha la concavità rivolta verso il basso.
Se $y_0 = 0$ (e quindi $x_0 < 0$) allora $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \underline{\partial} f(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0) = y^3$ da cui segue che se $y > 0$ la concavità è rivolta verso il basso e viceversa se $y < 0$. Il risultato è che la funzione non ha concavità definita.

16.7** Dimostrazione di i) con le ipotesi 1) e 2).
Sappiamo che $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x,y) - l| < \varepsilon$ e che $\forall\ |y-y_o| < r,\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \tilde\delta_\varepsilon :\ 0 < |x-x_o| < \tilde\delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x,y) - F(y)| < \varepsilon$. Vogliamo far vedere che $\lim_{y\to y_o} F(y) = l$ ossia che $\lim_{y\to y_o}\lim_{x\to x_o} f(x,y) = l$.
Infatti dalla disuduaglainza $|F(y)-l| \le |F(y)-f(x,y)| + |f(x,y)-l|$ segue che se $0 < \|\underline{x}-\underline{x}_o\| < \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$, $|x-x_o| < \tilde\delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$ e $|y-y_o| < r$, si può maggiorare $|F(y)-l| \le |F(y)-f(x,y)| + |f(x,y)-l| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$.
Le condizioni su $|y-y_o|$ e $|x-x_o|$ sono implicate dalle seguenti $|y-y_o| < \min\{r, \tilde\delta_{\frac{\varepsilon}{2}}\} \doteq r_1$ e $|x-x_o| < \min\{\delta_{\frac{\varepsilon}{2}}, \tilde\delta_{\frac{\varepsilon}{2}}\} \doteq r_2$ che a sua volta è implicata da $|y-y_o| + |x-x_o| < \min\{r_1, r_2\}$.
Volendo una condizione sulla norma di Pitagora otteniamo $\|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \min\{r_1, r_2\}$
Una dimostrazione analoga potrebbe essere portata avanti per dimostrare che $\lim_{x\to x_o} G(x) = l$ ossia che $\lim_{x\to x_o}\lim_{y\to y_o} f(x,y) = l$.

Per quanto riguarda le funzioni seguenti si ha che la prima non ammette solamente $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(\underline{x})$, la seconda solamente $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(\underline{x})$ e la terza solamente $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$.

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \qquad f(\underline{x}) = \begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

La prima delle seguenti funzioni ammette solamente $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(\underline{x})$,
la seconda $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(\underline{x})$ mentre la terza solamente $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + x\sin\dfrac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \qquad f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + y\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 \quad \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

Per il punto 3) la funzione seguente ammette $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(\underline{x})$, e $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(\underline{x})$, ma sono diversi

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 \quad \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

Per il punto 4) abbiamo la funzione $f(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x,y) = h(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{y\to 0} f(x,y) = g(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

ed i limiti sono chiaramente uniformi rispettivamente in y e x. $\lim_{y\to 0} h(y) = \lim_{x\to 0} g(x) = 1$ ma $\lim_{\underline{x}\to \underline{0}} f(\underline{x})$ non esiste.

17.7 La funzione sta sul `libro di testo a pag.303` e si dimostra che non è continua nell'origine. La dimostrazione fa uso del fatto che pur esistendo il limite sempre uguale su ogni restrizione consistente in un segmento passante per l'origine, tale limite non è uniforme nell'inclinazione del segmento (coefficiente angolare) e quindi la funzione non è continua.
Del resto $|f(\underline{x})| = \tan\theta \|\underline{x}\|$ dove $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (se $\theta = \frac{\pi}{2}$ $f(\underline{x}) \equiv 0$). Se quindi si restringe la funzione ad una qualsiasi retta passante per l'origine si ottiene
$|f(\underline{x})| = \min\{0, m\}\sqrt{x^2 + m^2x^2}$ dove $m = \tan\theta = \frac{y}{x}$. Se ora prendiamo una successione $(x_k, y_k) = (x_k, m_k x_k)$ $x_k = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$, $m_k = k$ otteniamo una successione per cui
$\lim_{k\to 0} f(x_k, m_k x_k) = +\infty$.

18.7 $f_x = 3y - 3x^2$, $f_y = 3x - 3y^2$, $f_{xx} = -6x$, $f_{yy} = -6y$, $f_{xy} = 3$. $(0,0)$ e $(1,1)$ sono gli unici punti critici. Il determinante della matrice hessiana $\begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$ è dato da $9(4xy - 1)$ che è negativo se calcolato in $(0,0)$ per cui l'origine è un punto di sella. In $(1,1)$ il determinante è positivo ed essendo $f_{xx}(1,1) = -6$ il punto è di massimo. Non a caso $d^2f(1,1) = -3((dx)^2 + (dy)^2 - dxdy) = -3[(dx - \frac{1}{2}dy)^2 + \frac{3}{4}(dy)^2]$ che è sempre positivo mentre $d^2f(\underline{0}) = 3dxdy$. Analizziamo ora in generale la covessità della funzione. Se $4xy - 1 > 0 \ \wedge \ x > 0$ la funzione ha ambedue gli autovalori negativi e quindi ha la concavità rivolta verso il basso. Se $4xy - 1 > 0 \wedge x < 0$ succede esattamente il contrario. Se $4xy - 1 < 0$ la funzione non ha concavità definita. Sull'iperbole di equazione $4xy = 1$ il determinante della matrice è nullo. Risolvendo il sistema lineare $\begin{pmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -\frac{6}{4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ottiene il vettore $(1, 2x)$ (a meno di multipli che però influiscono solo sul modulo del vettore) lungo la cui direzione l'autovalore della matrice hessiana è nullo. Dunque per ogni punto della iperbole di equazione $4xy = 1$ è definito un vettore di componenti $(1, 2x)$ il cui autovalore è nullo. L'altro autovalore è dato da $\lambda_2(x) = -6x - \frac{3}{2x}$ $(\lambda_1(x) \equiv 0)$ e si vede che se $x > 0$ allora $\lambda_2(x) < 0$ mentre se $x < 0 \ \wedge \ x \neq -\frac{1}{2}$ allora $\lambda_2(x) > 0$ $(\lambda_2(-\frac{1}{2})) = 0$. Chiaramente l'autovettore corrispondente a $\lambda_2(x)$ è dato da $(2x, -1)$. Se calcoliamo il differenziale secondo sull'iperbole e nella direzione $(1, 2x)$ allora otteniamo 0. Infatti $d^2f(\underline{x}) = \frac{1}{2}(-6x)(dx)^2 + \frac{1}{2}(-6y)(dy)^2 + 3(dx)(dy)$ e quindi $d^2f(x, \frac{1}{4x})\,|_{dy=2xdx} = -3x(dx)^2 - \frac{3}{4x}(2x)^2(dx)^2 + 3(2x)(dx)^2 \equiv 0$ per ogni dx. In generale $d^2f(x, \frac{1}{4x}) = -\frac{3}{x}(x(dx) - \frac{1}{2}(dy))^2$ e per $x > 0$ è una quantità sempre negativa a meno che $dy = 2xdx$ nel qual caso è nulla.
Per sapere sulla convessità della funzione bisogna andare ad investigare le derivate terze della funzione. $f_{xxx} = -6$, $f_{yyy} = -6$ e quindi $d^3f(\underline{x}) = -6((dx)^3 + (dy)^3)$ e poi tenere conto del fatto che $dy = 2xdx$ in quanto il vettore (dx, dy) deve essere un multiplo di $(1, 2x)$. Inserendo si ottiene $d^3f(x, \frac{1}{4x})\,|_{dy=2xdx} = -6(dx)^3(1 + 8x^3)$ e quindi si ottiene che per i punti con ascissa

positiva ($x > 0$) tali che $4xy = 1$, *se ci si muove nella direzione* $(1, 2x)$ *e* $dx > 0$ si "scende di quota" *se ci si muove nella direzione* $(1, 2x)$ *e* $dx < 0$ si "sale di quota". Essendo l'altro autovalore negativo se ne ricava che la funzione *"ha la forma di una grondaia rivolta verso il basso il cui canale centrale ha un flesso discendente sull'iperbole data* e se ci si discosta da esso si diminuisce di ordinata . Se $x < 0 \ \wedge \ x > -\frac{1}{2}$ si ha lo stesso fatto ossia per $dx > 0$ si scende di quota mentre per $dx < 0$ si sale e quindi, essendo l'altro autovalore positivo, il grafico della funzione *è localmente una "una grondaia rivolta verso l'alto il cui canale centrale interseca in ogni punto l'iperbole ed ha un flesso discendente sull'iperbole.* Se $x < 0 \ \wedge \ x < -\frac{1}{2} \ \wedge 4xy = 1$ allora si ottiene che per tali punti se ci si muove nella direzione $(1, 2x)$ e $dx > 0$ si "sale di quota" mentre se $dx < 0$ si scende e quindi essendo l'altro autovalore positivo se ne ricava che la funzione è localmente "una grondaia rivolta verso l'alto il cui canale centrale interseca in ogni punto l'iperbole ed ha un flesso ascendente sull'iperbole".
L'ultima discussione riguarda il punto di coordinate $(x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Tale punto ha la peculiarità per cui se ci si muove a partire da esso nella direzione $(1, -1)$ il differenziale secondo e terzo sono zero. Si può verificare che anche il differenziale primo è nullo per cui essendo le derivate di ordine quattro identicamente nulle ne segue che, localmente, il grafico della funzione non cambia se ci si muove nella direzione $(1, -1)$ ed essendo l'altro autovalore positivo il grafico ha la concavità rivolta verso l'alto. In pratica il grafico è costituito localmente da una grondaia rivolta verso l'alto *il cui canale centrale non ha alcun flesso.* Che il differenziale primo sia nullo lo si evince dal fatto che $df(x, \frac{1}{4x})\big|_{dy=2xdx} = (\frac{3}{4x} - 3x^2)dx + (3x - \frac{3}{16x^2})2xdx = (3x^2 + \frac{3}{8x})dx$ che vale zero se calcolato per $x = -\frac{1}{2}$.

19.7 $f_x = 12x^3 - 8xy$, $f_y = -4x^2 + 2y$, $f_{xx} = 36x^2 - 8y$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -8x$. Il determinante della matrice hessiana è $-8(23x^2 + 2y)$ e quindi se $y > -\frac{23}{2}x^2$ non ha concavità definita. Se $y < -\frac{23}{2}x^2$ la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto. Sulla parabola di equazione $y = -\frac{23}{2}x^2$ si ha un autovalore nullo. La matrice hessiana diventa $\begin{pmatrix} -36x^2 & -16x \\ -16x & 2 \end{pmatrix}$ ed i suoi autovalori sono dati da $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2 + 128x^2$. Corrispondentemente all'autovalore nullo si ha la direzione $(1, 8x)$ ottenuta risolvendo il sistema lineare $\begin{pmatrix} -128x^2 & -16x \\ -16x & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mentre all'autovalore λ_2 corrisponde $\begin{pmatrix} -2 & -16x \\ -16x & -128x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ossia $a(1, -\frac{1}{8x})$ che è un vettore (guarda caso) ortogonale al precedente. Per sapere il comportamento della funzione nell'intorno di un punto sulla parabola bisogna andare a prendere le derivate terze. $f_{xxx} = 72x$, $f_{xxy} = -8$ e le altre nulle. $d^3 f = \frac{72}{6}x(dx)^3 - \frac{8}{2}(dx)^2(dy)$ e tenendo conto che $dy = 8xdx$ is ha $d^3 f(x, -\frac{23}{2}x^2)\,|_{\lambda_1} = -20x(dx)^3$ da cui si deduce che:
per $x > 0$ la funzione, nella direzione $(1, 8x)$, a partire dal punto di coordinate $(x, -\frac{23}{2}x^2)$, decresce se $dx > 0$ e cresce se $dx < 0$ e quindi il grafico "è una grondaia rivolta verso l'alto (essendo l'altro autovalore positivo) il cui canale centrale ha un flesso discendente lungo la parabola
Viceversa se $x < 0$ il grafico "è una grondaia rivolta verso l'alto (essendo l'altro autovalore positivo) il cui canale centrale ha un flesso ascendente lungo la parabola"
Dall'esercizio **10.7** sappiamo che l'origine è un punto di sella ed il gradiente è ivi nullo. La matrice hessiana ivi calcolata dà $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e chiaramente l'altro autovalore è positivo. Il calcolo $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dà $b = 0$ per cui la direzione è $(1, 0)$. Corrispondentemente all'altro autovalore ossia $\lambda = 2$ si ha che la matrice diventa $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed ogni vettore del tipo $(0, b)$ è autovettore. Il conteggio del contributo di $d^3 f$ calcolato sul punto $(0, 0)$ e nella direzione $(1, 0)$ è nullo in quanto $d^3 f = \frac{72}{6}x(dx)^3 - \frac{8}{2}(dx)^2(dy)$ va calcolato per $x = 0$ e $dy = 0$. Bisogna ricorrere

al contributo di ordine quattro ed ottenere $d^4 f = \frac{72}{4!}(dx)^4$ da cui si ottiene solo che la funzione "localmente è costituita da una grondaia rivolta verso l'alto sia quando ci si muove lungo la direzione $(1,0)$ che $(0,1)$ ed il cui canale centrale non ha flessi". Nell'intorno di $(0,0)$ la funzione è $f(dx,dy) = (dy)^2 - 4(dx)^2(dy) + \frac{72}{4!}(dx)^4 = (dy)(dy - 4(dx)^2) + \frac{72}{4!}(dx)^4$

20.7 Osserviamo innanzitutto che $f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y) = f(-x,-y) = f(y,x)$. La funzione è nulla sugli assi coordinati e sulla circonferenza di raggio 1. All'interno dell'insieme $Q = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 1\} \cap \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ la funzione è positiva per $x^2 + y^2 - 1 < 0$ e negativa sul complementare. La stessa cosa accade nell'insieme $Q = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 ||x| \le 1, |y| \le 1\} \cap \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x < 0, y < 0\}$ mentre negli insiemi $Q = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 ||x| \le 1, |y| \le 1\} \cap \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y < 0\}$ e $Q = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 ||x| \le 1, |y| \le 1\} \cap \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid x < 0, y > 0\}$ la funzione è positiva all'interno della circonferenza e positiva all'esterno. Ne consegue che gli assi sono costituiti da punti di sella. $\partial_x f(\underline{x}) = y(1 - y^2 - 3x^2)$, $\partial_y f(\underline{x}) = x(1 - x^2 - 3y^2)$, $\partial_{xx} f(\underline{x}) = -6xy$, $\partial_{yy} f(\underline{x}) = -6xy$ $\partial_{xy} f(\underline{x}) = 1 - 3x^2 - 3y^2$, $\partial_{xxx} f(\underline{x}) = -6y$, $\partial_{yyy} f(\underline{x}) = -6x$, $\partial_{xxy} f(\underline{x}) = -6x$, $\partial_{xyy} f(\underline{x}) = -6y$, $\partial_{xxxy} f(\underline{x}) = -6$, $\partial_{xyyy} f(\underline{x}) = -6$

La matrice hessiana è $\begin{pmatrix} -6xy & 1 - 3x^2 - 3y^3 \\ 1 - 3x^2 - 3y^3 & -6xy \end{pmatrix}$ ed il determinante è $D(x,y) = 36x^2y^2 - (1 - 3x^2 - 3y^2)^2$ che è positivo se $6|x||y| \ge |1 - 3x^2 - 3y^2|$. Mettiamoci nel primo quadrante $x > 0$ e $y > 0$. Risulta che $D(x,y) > 0$, $\underline{x} \in \{\underline{x} \in Q \mid y > -x + \frac{1}{\sqrt{3}},\ y > x - \frac{1}{\sqrt{3}},\ y < x + \frac{1}{\sqrt{3}}\}$. Poiché $f_{xx} < 0$ in tale quadrante, ne consegue che la funzione ha la concavità rivolta verso il basso ed infatti il punto di coordinate $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è un massimo. Per le proprietà della funzione f la stessa cosa accade nel terzo quadrante mentre nel secondo e quarto quadrante la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto. Analizziamo ora quanto accade nei punti in cui $D(x,y) = 0$. Cominciamo dalla retta $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}}$. La matrice hessiana, calcolata su tale retta, diventa $\begin{pmatrix} 6x^2 - 2\sqrt{3}x & -6x^2 + 2\sqrt{3}x \\ -6x^2 + 2\sqrt{3}x & 6x^2 - 2\sqrt{3}x \end{pmatrix}$ ed ammette i due autovalori $\lambda_1(x) \equiv 0$ $\lambda_2(x) = 12x^2 - 4\sqrt{3}x$ che è sempre negativo per $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Agli autovalori corrispondono gli autovettori rispettivamente $(6x^2 - 2\sqrt{3}x)(1,1)$ e $(-6x^2 + 2\sqrt{3}x)(1,-1)$. Se quindi $x \ne 0 \wedge x \ne \frac{1}{\sqrt{3}}$ allora il secondo autovalore è negativo e questo vuol dire che se ci muoviamo nella direzione $(1,-1)$ si diminuisce di ordinata. Se ci si muove nella direzione $(1,1)$ si ha zero e quindi bisogna andare a prendere il contributo del differenziale terzo. $d^3 f(x,y) = -y(dx)^3 - x(dy)^3 - 3x(dx)^2(dy) - 3y(dx)(dy)^2$ e quindi $d^3 f(x, -x + \frac{1}{\sqrt{3}})\,|_{dx=dy} = -\frac{4}{\sqrt{3}}(dx)^3$ e quindi se ci si muove lungo il vettore $(1,1)$ a partire dalla retta $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ per incrementi positivi nelle ascisse si diminuisce di ordinata e viceversa se l'incremento avviene verso le ascisse negative.

Vediamo ora cosa accade per $x = 0$. In tal caso la matrice hessiana è $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi gli autovalori sono nulli. D'altra parte $d^3 f(0, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{4}{\sqrt{3}}(dx)^3$ e quindi se ci muoviamo verso il primo quadrante diminuiamo di ordinata e viceversa se ci muoviamo verso il secondo quadrante.

Usando $f(x,y) = f(y,x)$, si ottiene il comportamento della funzione nella seconda metà del primo quadrante ed usando le altre proprietà se ne ottiene il comportamento ovunque (sui segmenti dove si annulla la matrice seconda naturalmente).

21.7 Cominciamo dalla regione $x > y^3$. Dalla risoluzione data si vede che $y = 0$ allora la matrice è semidefinta positiva. I soli punti con ordinata nulla sono quelli con ascissa positiva. Il differenziale secondo è dato da $d^2 f(x,y) = (dx)^2 + 15y^4(dy)^2$ che sul punto $(x,0)$ diventa $d^2 f(x,0) = (dx)^2$ e quindi se ci si muove mantenendo nullo dy si aumenta in ordinata rispetto al piano tangente. Il contributo successivo è dato da $d^6 f(x,y) = (dy)^6$ che è sempre positivo per cui la concavità è rivolta verso l'alto e per giunta strettamente. Nell'intorno di un qualsiasi punto di ordinata nulla $(x_o, 0)$ la funzione è tale che $f(x_o + dx, dy) - x_o^2 - 2x_o dx = (dx)^2 + (dy)^6$

Se invece $x < y^3$ allora le cose sono diverse. In tal caso il determinante della matrice hessiana è sempre nullo e gli autovalori sono dati da $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 6y$. Se $y > 0$ $\lambda_2(y) > 0$ e quindi lungo la direzione individuata dal vettore $\binom{0}{b}$ la funzione aumenta di ordinata. Se $y < 0$ la funzione diminuisce di ordinata. Lungo la direzione $\binom{a}{0}$ l'autovalore è nullo. Il differenziale secondo $d^2f(x,y) = 3y(dy)^2$ non ci aiuta in quanto esso va calcolato per $dy = 0$ $(b = 0)$. Bisogna passare al differenziale terzo $d^3f(x,y) = (dy)^3$ e si annulla anche esso. Se ne deduce che la funzione, muovendosi parallelamente all'asse delle y incrementa la sua ordinata se $y > 0$ e la diminuisce se $y < 0$ mentre la mantiene costante se ci si muove parallelamente all'asse delle x. Praticamente la figura è "una grondaia rivolta verso l'alto per $y > 0$ e verso il basso per $y < 0$. Il canale contrale è parallelo all'asse delle ascisse". Se $y = 0$ è facile rendersi conto che la funzione è rappresentata dal piano $z = x$. In pratica nell'intorno di un punto (x_o, y_o) si ha $f(x_o + dx, y_o + dy) - f(x_o, y_o) - \underline{\partial} f(x_o, y_o) \cdot (dx, dy) = 3y(dy)^2 + (dy)^3$

23.7 Nel caso dell'esercizio **3.8** assumiamo che lo studente/ssa abbia già trovato i punti di estremo vincolato con i relativi valori delle variabili e del moltiplicatore di Lagrange. Pertanto si ha $\lambda = 0$ $x = e$, $y = \frac{1}{e}$. La matrice $f_{x_i x_j}(\underline{x}^o) - \lambda^o g_{x_i x_j}(\underline{x}^o)$ diventa $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mentre la condizione di tangenzialità dello spostamento è data da $\frac{3}{2}e\alpha - \beta\frac{1}{2e} = 0$ dove $\underline{h} = (\alpha, \beta)$ e $\underline{\partial}\phi = (-y + \frac{1}{2x}, -x - \frac{1}{2y})$ che va poi calcolato in $x = e$ $y = \frac{1}{e}$. La condizione si traduce in $3\alpha e = \frac{1}{2e}\beta = 0$. La forma quadratica del Teorema enunciato nel testo dell'esercizio è in questo caso $-2\alpha\beta = -6\alpha^2 e^2 < 0$ e quindi si tratta di un massimo. Si confronti questa risoluzione con quella data nel libro contenente l'esercizio.

Tra l'altro la esistenza dell'unico punto di estremo $(x, y) = (e, \frac{1}{e})$ ed il fatto che tutti i punti del vincolo siano *regolari* (il gradiente del vincolo è un vettore mai nullo essendo uguale a $(\frac{1}{2x} - y, -\frac{1}{2y} - x)$ e la seconda componente mai nulla dal fatto che $x > 0$ $y > 0$) ci dice pure che il sostegno della curva definita dall'equazione del vincolo è un sottoinsieme illimitato di $\mathbf{R}^2$. Supponiamo infatti che tale sostegno sia un insieme limitato. Certamente è un insieme chiuso essendo dato da $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{2}\ln\frac{x}{y} - xy = 0,\ x > 0,\ y > 0\}$ e quindi è la controimmagine continua di un insieme chiuso $(\{0\} \in \mathbf{R})$. Essendo la funzione dell'esercizio una funzione continua, il `Teorema 5.9 pag.200 del libro di testo` ci dice che ammette massimo e minimo (eventualmente più di uno). Il *Teorema sui moltiplicatori di Lagrange* implicherebbe che in tali massimi e minimi la funzione $f(x,y) - \lambda\phi(x,y)$ deve avere gradiente nullo in quanto tutti i punti del vincolo sono punti *regolari* ma ciò avviene per un solo punto da cui ne segue che il massimo oppure il minimo (sappiamo il minimo) non esiste. La contraddizione si risolve dicendo che il sostegno della curva è un insieme illimitato e quindi non compatto. Volendo "toccare con mano" tale proprietà si consideri una successione $\{m_k\}$ tale che $m_k \to 0$ $m_k > 0$ e la successione $\{(x_k, y_k,)\}$ con $x_k = \frac{1}{\sqrt{2m_k}}\sqrt{\ln\frac{1}{m_k}}$, $y_k = \sqrt{\frac{m_k}{2}}\sqrt{\ln\frac{1}{m_k}}$.

Per quanto riguarda la seconda domanda dell'esercizio, anche in questo caso supponiamo di sapere già che esistono i seguenti punti di estremo:

$$P_1 : \begin{cases} \lambda_1 = 1/2 \\ \lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} \lambda_1 = 3/2 \\ \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \quad P_+ : \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{3}/2 \\ x = 1/2 \\ y = \sqrt{3}/2 \\ z = (1 - \sqrt{3})/2 \end{cases} \quad P_- : \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\sqrt{3}/2 \\ x = 1/2 \\ y = -\sqrt{3}/2 \\ z = (1 + \sqrt{3})/2 \end{cases}$$

$f(P_1) = 0$, $f(P_2) = 2$, $f(P_+) = -\frac{1}{4}$ $f(P_-) = -\frac{1}{4}$ per cui P_2 è certamente un massimo e P_+

oppure P_- oppure tutte e due è un minimo. Per sapere la natura degli altri punti bisogna procedere come nel precedente esercizio. Cominciamo da P_1. La matrice $f_{\underline{xx}} - \lambda_1(\phi_1)_{\underline{xx}} - \lambda_2(\phi_2)_{\underline{xx}}$ è $\begin{pmatrix} 2-2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-2\lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e calcolata in P_1 si ha $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La tangenzialità del vettore $\underline{h} = (a, b, c,)$ dà luogo alle equazioni $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2ax+2by=0 \end{cases}$ e quindi (calcolando in $(1,0,0)$) $a=0$, $b+c=0$. La forma quadratica presente nel Teorema enunciato nel testo di codesto esercizio è data da

$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a^2 + ab + ac = a^2 - b^2 = -b^2$ tenendo conto della tangenzialità di $(\underline{h})$. Ne segue che P_1 è un massimo.

Se ora si fa il conto per i punti $P_\pm$ si ottiene $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2a^2$ tenendo conto della tangenzialità del vettore $\underline{h}$. Ora $a=0$ implica che $b=0$ essendo l'ordinata di $P_\pm$ non nulla. Ma allora segue pure che $c=0$ e quindi $\underline{h} = \underline{0}$ che è da escludere. Ne segue che $P_\pm$ è un minimo.

Da ultimo consideriamo P_2. La forma quadratica è $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -a^2 - b^2 + 2ab + bc = -a^2 - b^2 + ab - b^2 = -(a - \frac{1}{2}b)^2 - \frac{7}{8}b^2 < 0$ per cui è un massimo.

Si può calcolare il determinante della matrice associata ai punti $P_\pm$ ed ottenere -2 da cui si evince che dei tre autovalori uno è negativo ed due positivi oppure sono tutti e tre negativi. Se fossimo stati in una situazione di estremi liberi avremmo concluso che $P_\pm$ sarebbero stati delle selle oppure dei massimi. Nel caso invece di estremi vincolati si tratta di minimi. Più o meno la stessa cosa accade con gli altri punti.

24.7 La funzione da minimizzare è la distanza del punto generico di $\mathbf{R}^3$ dal punto $(0,0,1)$ e quindi la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$ mentre l'equazione del vincolo è $\phi_1(\underline{x}) = y - x^2 = 0$, $\phi_2(\underline{x}) = z - x^2 = 0$. Cerchiamo eventuali punti non regolari ossia quei punti per i quali è minore di due il rango della matrice $\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è sempre diverso da zero per cui il rango è due. A questo punto risolviamo il sistema

$\begin{cases} \underline{\partial}(f(\underline{x}) - \lambda_1\phi_1(\underline{x}) - \lambda_2\phi_2(\underline{x}) = 0 \\ \phi_1(\underline{x}) = 0, \quad \phi_2(\underline{x}) = 0 \end{cases}$ ossia

$$\begin{cases} 2x(1+\lambda_1+\lambda_2) = 0, \quad 2y - \lambda_1 = 0, \quad 2(z-1) - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2, \quad z = x^2 \end{cases}$$

Si ottengono tre punti $P_1 = (0,0,0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$; $P_\pm = (\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. La distanza fra P_1 ed il punto $(0,0,1)$ è 1 mentre fra $P_\pm$ e $(0,0,1)$ è $\sqrt{\frac{7}{8}} < 1$ per cui il minimo c'è in corrispondenza a $P_\pm$. Ad ogni modo applichiamo il teorema dell'esercizio precedente e verifichiamo quanto trovato. La tangenzialità dello spostamento è data da $\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dunque si ha $\begin{cases} -2ax+b=0 \\ -2ax+c=0 \end{cases}$ che per ogni x implica $b=c$; inoltre calcolata per $x=0$ dà $b=c=0$ e $a\neq 0$.

La matrice hessiana da studiare è $\begin{pmatrix} 2+2\lambda_1+2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e nel caso del punto $(0,0,0)$ bisogna individuare il segno della forma quadratica

$$(a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2(2b^2-a^2) = -2a^2 < 0 \text{ per cui è un massimo relativo.}$$

Nel caso dei punti $P_\pm$ abbiamo che la relazione di tangenzialità implica che $b=c\neq 0$ per cui

$$(a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b^2 > 0 \text{ da cui un minimo relativo.}$$

Il massimo è relativo in quanto la funzione da minimizzare è illimitata sulla curva (la cui proiezione sul piano (y,z) è la retta di equazione $y=z$). Viceversa il minimo è assoluto essendo la funzione distanza sempre positiva.

25.7 La funzione da "estremizzare" è $g(\underline{x}) = \underline{x}^2$ e l'equazione del vincolo è $f(\underline{x}) = (\underline{x}, A\underline{x}) = 1$. L'unico punto che verifica l'equazione $\underline{\partial} f(\underline{x}) = A\underline{x} = \underline{0}$ è $\underline{x}=0$ che però non appartiene al vincolo e quindi non vi sono punti irregolari. Il vincolo è costituito da una superficie compatta (è un ellissoide) e la funzione g è continua per cui esistono sia massimo che minimo. È facile vedere che i punti critici della funzione $F(\underline{x},\lambda) = g - \lambda(f-1)$ sono dati da $\underline{x}_i^o = \frac{\underline{v}_i}{\sqrt{\mu_i}}$ dove $\underline{v}_i$ è l'autovalore i–esimo e μ_i è il corrispondente autovalore positivo; $\lambda_i = \frac{1}{\mu_i}$. Inoltre ordiniamo gli autovalori in modo che $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$. Il punto che ci interessa è $\underline{x}_2^o$ e la condizione di tangenzialità del vettore $\underline{h} = (a,b,c)$ è $\underline{x}_2^o \cdot \underline{h} = 0$. Poiché $(\hat{\underline{v}}_1, \hat{\underline{v}}_2, \hat{\underline{v}}_3)$ formano una base nello spazio $\mathbf{R}^3$ si ha $\underline{h} = \alpha\hat{\underline{v}}_1 + \beta\hat{\underline{v}}_3$. La matrice hessiana è $2(I-\lambda_2 A)$ e quindi dobbiamo sapere il segno della forma quadratica $(\underline{h}, (I-\lambda_2)A\underline{h}) = a^2(1-\frac{\mu_1}{\mu_2}) + b^2(1-\frac{\mu_3}{\mu_2})$ ed appare evidente che se $a=0$ allora $b\neq 0$ ed il segno è negativo in quanto $\frac{\mu_3}{\mu_2} > 1$ e viceversa per $b=0$ $a\neq 0$.

Vi è un secondo modo di procedere (concettualmente) identico al precedente. Si tratta di scrivere il vettore $\underline{y} = \alpha\underline{x}_2^o + \beta\underline{x}_3^o$ e di vedere quanto vale $g(\underline{y}) = \underline{y}^2$. Prima deve aversi $(\underline{y}, A\underline{y}) = (\alpha\mu_2\frac{\hat{\underline{v}}_2^o}{\sqrt{\mu_2}} + \beta\mu_3\frac{\hat{\underline{v}}_3^o}{\sqrt{\mu_3}}, \alpha\frac{\hat{\underline{v}}_2^o}{\sqrt{\mu_2}} + \beta\frac{\hat{\underline{v}}_3^o}{\sqrt{\mu_3}}) = \alpha^2+\beta^2 = 1$. $g(\underline{y}) = \alpha^2\frac{1}{\mu_2} + \beta\frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{\mu_2} + \beta^2(\frac{1}{\mu_3} - \frac{1}{\mu_2})$ ed essendo $g(\underline{x}_2^o) = \frac{1}{\mu_2}$ si ha $g(\underline{y}) < g(\underline{x}_2^o)$. Se ora si rifà il conto con $\underline{x}_1^o$ al posto di $\underline{x}_3^o$ si ha il segno opposto e quindi il risultato

26.7 Scriviamo la funzione dell'esercizio **11.7** in coordinate polari
$f(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) = f'(\rho,\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta\rho^2(1-\rho^2)$. Il vincolo è dato dalla equazione $\rho - e^{-\theta} = 0$. Poiché $(1, e^{-\theta})$ è un vettore non nullo non vi sono punti irregolari. $F(\rho,\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta\rho^2(1-\rho^2) - \lambda(\rho - e^{-\theta})$ è la funzione di cui bisogna trovare i punti critici rispetto alle variabili (ρ,θ,λ). Un rapido calcolo dimostra che bisogna risolvere il sistema

$F_\rho = 0 \Rightarrow \sin 2\theta\rho(1-2\rho^2) = \lambda$, $\quad F_\theta = 0 \Rightarrow \rho^2(1-\rho^2)\cos 2\theta = e^{-\theta}\lambda$, $\quad F_\lambda = 0 \Rightarrow \rho = e^{-\theta}$. Se $\lambda = 0$ l'unica soluzione è data da $\theta = 0$, $\rho = 1$. Altrimenti bisogna risolvere la equazione $\tan(2\theta) = \frac{1-e^{-2\theta}}{1-2e^{-2\theta}}$. Facendo il grafico delle due funzioni si evidenzia come vi siano infinite soluzioni maggiori del valore per cui la funzione di destra ha un asintoto verticale ossia $\theta_o = \frac{1}{2}\ln 2$. Per $\theta \to +\infty$ due soluzioni consecutive tendono a differire per una quantità fissata ossia π. Ora non resta che studiare la natura di tali punti critici. Quello con $\lambda = 0$ conduce allo studio della forma quadratica

$(a \quad b)\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -4ab = -4a^2 < 0$ da cui il fatto che è un massimo. L'ultimo passaggio è ottenuto tenendo conto del fatto che il vettore (a,b) deve essere ortogonale al vettore $(1,e^{-\theta})$ calcolato in $\theta=0$ e quindi $(1,1)$.

$F_{\rho\rho} = \sin 2\theta(1-6\rho^2)$, $F_{\rho\theta} = 2\rho(1-2\rho^2)\cos 2\theta$, $F_{\theta\theta} = -2\rho^2(1-\rho^2)\sin 2\theta + \lambda e^{-\theta}$ per cui bisogna studiare la forma quadratica seguente (si tenga presente che la tangenzialità del vettore $\underline{h}=(a,b)$ impone $a=-be^{-\theta}$)

$$(a \quad b)\begin{pmatrix} \sin 2\theta(1-6\rho^2) & 2\rho(1-2\rho^2)\cos 2\theta \\ 2\rho(1-2\rho^2)\cos 2\theta & -2\rho^2(1-\rho^2)\sin 2\theta + \lambda e^{-\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$= a^2\sin 2\theta(1-6\rho^2) + 2ab2\rho(1-2\rho^2)\cos 2\theta + b^2 - 2\rho^2(1-\rho^2)\sin 2\theta + \lambda e^{-\theta}$
e sostituendo il valore di λ si ha $b^2e^{-\theta}[(1-6\rho^2)\sin 2\theta - 4\cos 2\theta(1-2\rho^2) + (1-\rho^2)(\cos 2\theta - 2\sin 2\theta)] = b^2e^{-\theta}[\cos 2\theta(7\rho^2-3) + \sin 2\theta(-1-4\rho^2)]$
Sappiamo che $\sin 2\theta(1-2\rho^2) = \cos 2\theta(1-\rho^2)$ e quindi otteniamo che la forma quadratica è data da $-2\frac{b^2e^{-2\theta}}{1-2\rho^2}\cos 2\theta(5\rho^4-5\rho+2)$ che è sempre positiva o nulla quando $\cos 2\theta \le 0$. I valori di θ da sostituire sono tali che $\tan 2\theta = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho^2}$ ossia $2\theta = \arctan(\frac{1-\rho^2}{1-2\rho^2}) + k(\theta)\pi$ dove $k(\theta)$ è un intero che vale k se $\theta \in [-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi]$. Dunque $\cos 2\theta = \cos\pi(k(\theta))\frac{1-2\rho^2}{\sqrt{2-6\rho^2+6\rho^4}}$ che non è mai nulla ed è positiva per $k(\theta)$ pari e viceversa dispari. Ne concludiamo che se il valor θ per cui si ha $\tan 2\theta = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho^2}$ appartiene all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi]$ con k pari allora si ha un massimo altrimenti un minimo.

27.7*** Sia dato quindi $A = \overset{\circ}{A} \subset \mathbf{R}^n$. Supponiamo che $\underline{0} \in A$ e che $f(\underline{0}) = 0$ (altrimenti trasliamo nello spazio $\mathbf{R}^n$ e sull'asse delle ordinate). Facciamo prima il caso $n=2$. Essendo A aperto sia $B(\underline{0};r) \subset A$ una sfera di raggio r e centro in $\underline{0}$. All'interno di tale sfera prendiamo l'insieme $\mathcal{Q} = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \ \mid |x| \le l, \ |y| \le l, \ 0 < l < \frac{r}{\sqrt{2}}\}$ la cui frontiera è il quadrato Q che è compatto. Supponiamo che la funzione non sia continua in $\underline{0}$. Vuol dire che $\exists\ \varepsilon > 0 \mid \forall\ \delta\ \exists\ \underline{x}_\delta \mid |\underline{x}_\delta| < \delta \ \wedge\ |f(\underline{x}_\delta)| \ge \varepsilon$. Consideriamo l'insieme dei punti per i quali $f(\underline{x}_\delta) \ge \varepsilon$. Per ogni $\underline{x}_\delta$ esiste un punto $\overline{\underline{x}}_\delta \in Q$ tale che $\underline{x}_\delta = \lambda_\delta \overline{\underline{x}}_\delta$. Per la convessità si ha $f(\lambda_\delta\overline{\underline{x}}_\delta) \le \lambda_\delta f(\overline{\underline{x}}_\delta)$. Prendendo quindi una successione $\{\delta_k\}$ $\delta_k = \frac{1}{k}$ si ha che $\lambda_{\delta_k} \to 0$ in quanto $\|\underline{x}_{\delta_k}\|$ è un numero compreso fra l e $\sqrt{2}l$. Poiché $\|\underline{x}_{\delta_k}\| \to 0$, l'unico modo per essere coerenti è dire che $\lambda_{\delta_k} \to 0$. Siccome la funzione è convessa abbiamo $f(\lambda\underline{x}) \le \lambda f(\underline{x})$ *per ogni* $0 < \lambda < 1$. Ma allora si può dire che $\varepsilon \le \inf_k f(\underline{x}_{\delta_k}) \le \inf_k \lambda_{\delta_k} f(\overline{\underline{x}}_{\delta_k}) \le \inf_k \lambda_{\delta_k} \sup_{\underline{x}\in Q} f(\underline{x})$ che è una contraddizione se dimostriamo che $\sup_{\underline{x}\in Q} f(\overline{\underline{x}})$ è un numero finito. Infatti ε è un numero positivo ancorché piccolo.
Dimostriamo quindi che la funzione è limitata su Q in modo tale che $\sup_{\underline{x}\in Q} f(\underline{x}) < +\infty$. A tale proposito si considerino in successione i lati del quadrato Q. Prendiamo in considerazione uno di essi e supponiamo che sia dato dal segmento PP' nel piano $\mathbf{R}^2$. La funzione $f|_{PP'}(\underline{x})$ è Lipschitziana come deriva dai `Teoremi del Capitolo 6.12 (funzioni concave e convesse)`. Essendo f Lipschitziana è continua e quindi $f|_{PP'}(\underline{x})$ ammette massimo e minimo. Lo stesso discorso può farsi per gli altri lati e quindi $\sup_{\underline{x}\in Q} f(\underline{x})$ è il massimo di f su Q
Consideriamo l'insieme dei punti $\underline{x}_\delta$ per i quali $f(\underline{x}_\delta) < -\varepsilon$ e per ogni punto $\underline{x}_\delta = (x_\delta, y_\delta)$ le due rette r_1 e r_2 passanti rispettivamente per $(0,0)$ e (x_δ,y_δ) e $(0,0,0)$ $(x_\delta,y_\delta,f(\underline{x}_\delta))$. La prima retta si trova nel piano (x,y) mentre la seconda nello spazio (x,y,z) e sono rappresentabili parametricamente da $r_1 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \ \mid x = \alpha t, \ y = \beta t, \ 0 \le t \le \|\underline{x}_\delta\|\}$ dove $\beta = \frac{y_\delta}{x_\delta}$ e $\alpha = 1$ se $x_\delta \ne 0$ mentre se $x_\delta = 0$ allora $\alpha = 0$ e $\beta = 1$; $r_2 = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \ \mid x = \alpha t, \ y = \beta t, \ z = \gamma t, 0 < t < \|\underline{x}_\delta\|\}$ dove $\beta = \frac{y_\delta}{x_\delta}$ $\alpha = 1$ e $\gamma = \frac{f(\underline{x}_\delta)}{\|\underline{x}_\delta\|}$ se $x_\delta \ne 0$ mentre se $x_\delta = 0$ allora $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ e $\gamma = \frac{f(\underline{x}_\delta)}{\|\underline{x}_\delta\|}$. Per $\delta \to 0$ il rapporto incrementale $\frac{f(\underline{x}_\delta)}{\|\underline{x}_\delta\|}$ è illimitato inferiormente e la funzione *deve*

giacere sotto alla retta r_2 *e passare per il punto* $(0,0,0)$. Deve giacere sotto in quanto la retta r_2 è una *corda* della funzione. Consideriamo ora le stesse rette ma nel segmento $[\underline{0}, -\underline{x}_\delta]$. Facciamo vedere che se $f(\underline{x}_\delta) < \varepsilon \ \Rightarrow \ f(-\underline{x}_\delta) \geq \varepsilon$ e quindi si ricadrebbe nel caso già trattato. Supponiamo infatti che $f(-\underline{x}_\delta) < \varepsilon$. Il segmento (s) che congiunge i punti $(-\underline{x}_\delta, f(-\underline{x}_\delta))$ e $(\underline{x}_\delta, f(\underline{x}_\delta))$ è una corda della funzione e l'ordinata della corda in corrispondenza a $\underline{0}$ è 0. Ora essendo la funzione convessa, essa deve giacere sotto alla corda s e quindi la sua ordinata può essere o negativa o nulla. Non può essere negativa in quanto sappiamo che $f(\underline{0}) = 0$. Non può essere neppure nulla in quanto la funzione ristretta alla proiezione del segmento s sul piano (x,u) è convessa e quindi continua

Rispondiamo ora alla seconda domanda. Come al solito supponiamo che $\underline{0} \in A$ che è aperto e quindi $\underline{0} \in B(\underline{0}; r)$ con $\overline{B}(\underline{0}; r) \subset A$, $r > 0$. Supponiamo inoltre che $f(\underline{0}) = 0$ ed essendo la funzione derivabile possiamo supporre le derivate nulle. Altrimenti consideriamo la funzione $f(\underline{x}) - \partial_x f(\underline{0})x - \partial_y f(\underline{0})y$ che è ancora convessa. Come prima cosa facciamo vedere che essendo la funzione derivabile e convessa è derivabile rispetto a tutte le direzioni. Fissiamo quindi un vettore $\underline{v}$ in $\mathbf{R}^2$ di modulo 1 e dimostriamo che $\lim_{t\to 0} \frac{f(t\underline{v})}{t} = 0$.
Supponiamo quindi che $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t\underline{v})}{t} = l > 0$ (il limite certamente esiste in quanto la funzione ristretta alla direzione $\underline{v}$ è convessa e quindi derivabile da destra e sinistra).
Abbiamo quindi che $\exists\ 0 < \varepsilon < 3l \mid \forall\ \overline{\delta} > 0\ \exists\ 0 < t_{\overline{\delta}} < \min\{\overline{\delta}, r\}$ *t.c.* $\frac{f(t_{\overline{\delta}}\underline{v})}{t_{\overline{\delta}}} \geq l - \varepsilon > 0$.
Viceversa sappiamo che $\lim_{t\to 0^\pm} \frac{f(t\underline{e}_1)}{t} = 0$ e $\lim_{t\to 0^\pm} \frac{f(t\underline{e}_2)}{t} = 0$ e quindi $\forall\ \varepsilon > 0 \mid \exists\ \delta_\varepsilon > 0 \mid |t| < \min\{\delta_\varepsilon, r\} \ \Rightarrow |\frac{f(t\underline{e}_{1,2})}{t}| < \varepsilon$. Prendiamo allora $\overline{\delta} = \delta_\varepsilon \doteq \rho$. "Tiriamo la corda" congiungente i punti $(t_\rho, 0, f(t_\rho, 0))$ e $(0, t_\rho, f(0, t_\rho))$ $t_\rho > 0$. Le ordinate assunte dalla corda sono positive e minori di εt_ρ. Essendo $f(t_\rho \underline{v}) \geq t_\rho(l - \varepsilon)$ e $0 < f(t_\rho \underline{e}_{1,2}) < t_\rho \varepsilon$ $(t_\rho > 0)$ ed essendo $2t_\rho\varepsilon < t_\rho(l-\varepsilon)$ ne segue che nel punto $t_\rho\underline{v}$ l'ordinata della funzione è maggiore della ordinata della corda e questo è impossibile per la convessità della funzione. Da ciò segue che per forza bisogna aversi $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t\underline{v})}{t} \leq 0$.
Seguendo gli stessi ragionamenti non può aversi $\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t\underline{v})}{t} < 0$ e quindi si ha $\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t\underline{v})}{t} \geq 0$.
Supponiamo ora che $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t\underline{v})}{t} = l < 0$ e $\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t\underline{v})}{t} = l' \geq 0$. La convessità della restrizione della funzione alla direzione data dal vettore $\underline{v}$ rende impossibile tale eventualità .
Supponiamo ora che $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t\underline{v})}{t} = 0$ e $\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t\underline{v})}{t} = l' > 0$. La convessità della restrizione della funzione alla direzione data dal vettore $\underline{v}$ rende impossibile anche tale eventualità .
Non rimane che $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t\underline{v})}{t} = 0$ e $\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t\underline{v})}{t} = 0$ da cui la derivabilità lungo la direzione $\underline{v}$ con derivata nulla.

Dimostriamo ora che la funzione è differenziabile. Anche qui cominciamo supponendo che la funzione non sia differenziabile e supponiamo sempre che le derivate parziali siano nulle $\underline{0}$. Ciò vuol dire che $\exists\ \varepsilon > 0 \mid \forall\ \delta > 0\ \exists\ \underline{h}_{\delta,\varepsilon}$, $\|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\| < \min\{\delta, r\}$ *t.c.* $|f(\underline{h}_{\delta,\varepsilon})| \geq \varepsilon \|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\|$.
Se tutti i vettori avessero la stessa direzione, ad esempio $\underline{h}_{\delta,\varepsilon} = t_{\delta,\varepsilon}\underline{v}$, e $\|\underline{v}\| = 1$ potremmo scrivere $|f(t_{\delta,\varepsilon}\underline{v})| \geq \varepsilon |t_{\delta,\varepsilon}|$ da cui seguirebbe la non derivabilità lungo la direzione $\underline{v}$. È bene tenere presente questa osservazione.
Una proprietà che serve è la *locale Lipschitzianità* . *Una funzione* $f\colon A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $A = \overset{\circ}{A}$, *è localmente lipschitziana se per ogni punto* $\underline{x}_o \in A$ *esiste una sfera aperta* $B(\underline{x}_o; r)$ *di raggio r ed una costante L tale che* $|f(\underline{x}) - f(\underline{y})| \leq L\|\underline{x} - \underline{y}\|$ $\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in B(\underline{x}_o; r)$
A partire da essa dimostriamo la

Proposizione *Una funzione* $f\colon A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $A = \overset{\circ}{A}$ *convessa, è localmente Lipschitziana*

Dimostrazione Sia $\underline{x}_o \in A$ ed essendo A aperto sia $K \subset A$ un compatto tale che $\underline{x}_o \in \overset{\circ}{K}$. Sia $B(\underline{x}_o, 2d) \subset \overset{\circ}{K}$ una sfera aperta con centro in $\underline{x}_o$. Vogliamo dimostrare che la funzione è uniformemente Lipschitziana nell'insieme $B(\underline{x}_o, d)$. Prendiamo quindi $B(\underline{x}_o, d)$ e consideriamo le due frontiere $\partial B(\underline{x}_o, 2d)$ $\partial B(\underline{x}_o, d)$. Prendiamo poi due qualsiasi punti $\underline{x}^> \in \partial B(\underline{x}_o, 2d)$ e $\underline{x}^< \in \partial B(\underline{x}_o, d)$ congiungibili con un segmento tutto contenuto in $\overline{B}(\underline{x}_o, 2d)\backslash B(\underline{x}_o, d)$. La quantità $\frac{|f(\underline{x}^>)-f(\underline{x}^<)|}{\|\underline{x}^>-\underline{x}^<\|}$ è limitata uniformemente in $\partial B(\underline{x}_o, 2d) \cup \partial B(\underline{x}_o, d)$ da un numero positivo L in quanto $\|\underline{x}^> - \underline{x}^<\| \geq d$ ed inoltre $|f(\underline{x}^>) - f(\underline{x}^<)|$ è limitata essendo $\partial B(\underline{x}_o, 2d) \subset K$ con K compatto ed f continua (già dimostrato). Prendiamo ora due qualsiasi punti $\underline{x} \in \partial B(\underline{x}_o, d)$ e $\underline{y} \in \partial B(\underline{x}_o, d)$. Congiungiamoli con un segmento e prolunghiamo il segmento fino a toccare $\partial \overline{B}(\underline{x}_o, 2d)$. Ebbene usando le proprietà di una funzione convessa di una variabile si può dire che $\frac{|f(\underline{x})-f(\underline{x})|}{\|\underline{x}-\underline{y}\|} \leq \frac{|f(\underline{x}^>)-f(\underline{x}^<)|}{\|\underline{x}^>-\underline{x}^<\|} \leq L$ da cui la uniforme Lipschitzianità in $B(\underline{x}_o, d)$.

Fine della dimostrazione

La convessità della funzione e la sua derivabilità danno luogo a $|f(\underline{h}_{\delta,\varepsilon})| = f(\underline{h}_{\delta,\varepsilon})$ e quindi $\exists\, \varepsilon > 0 \mid \forall\, \delta > 0\ \exists\, \underline{h}_{\delta,\varepsilon},\ \|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\| < \min\{\delta, r\} \mid f(\underline{h}_{\delta,\varepsilon}) \geq \varepsilon \|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\|$. Sempre dalla convessità abbiamo $f(\lambda \underline{x}) \leq \lambda f(\underline{x})$ con $0 < \lambda < 1$ e quindi, scrivendo $f(\underline{h}_{\delta,\varepsilon}) = f(\frac{\|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\|}{r} \frac{r\underline{h}_{\delta,\varepsilon}}{\|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\|})$ si ha $f(\frac{\|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\|}{r} \frac{r\underline{h}_{\delta,\varepsilon}}{\|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\|}) \leq \frac{\|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\|}{r} f(\frac{r\underline{h}_{\delta,\varepsilon}}{\|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\|})$; $\frac{\|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\|}{r} < 1$ essendo $\|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\| < \min\{\delta, r\}$. Ne segue che $|f(\underline{h}_{\delta,\varepsilon})| \geq \varepsilon \|\underline{h}_{\delta,\varepsilon}\|$ implica $f(\underline{v}_{\delta,\varepsilon}) \geq \varepsilon$ con $\|\underline{v}_{\delta,\varepsilon}\| = r$ ossia i vettori $\underline{v}_{\delta,\varepsilon}$ stanno su di un cerchio di raggio r. Il cerchio è compatto e l'insieme dei vettori $\{\underline{v}_{\delta,\varepsilon}\}$ al variare di δ per il Teorema di Bolzano–Weierstrass ha almeno un punto di accumulazione che chiamiamo $\underline{v}$ con $\|\underline{v}\| = r$. Vogliamo dimostrare che la funzione non è derivabile in $\underline{0}$ lungo la direzione $\underline{v}$. Poiché la funzione è convessa ciò contraddice l'ipotesi di convessità in quanto la restrizione della funzione ad una qualsiasi retta deve essere una funzione che in ogni punto ammette derivata destra e sinistra finite ed uguali. Il vettore $\underline{v}$ "sarebbe" il vettore $\underline{v}$ scritto prima nell'ipotesi che tutti i $\underline{h}_{\delta,\varepsilon}$ avessero la stessa direzione.

Per definizione di punto di accumulazione possiamo definire una successione di numeri $\{\delta_k\}$ tale che $\|\underline{v}_{\delta_k,\varepsilon} - \underline{v}\| \leq \frac{1}{k}$. A questo punto usiamo la locale Lipschitzianità per avere la catena di disuguaglianze $f(\delta_k \underline{v}) = f(\delta_k \underline{v}) - f(\delta_k v_{\delta_k,\varepsilon}) + f(\delta_k v_{\delta_k,\varepsilon}) \geq f(\delta_k v_{\delta_k,\varepsilon}) - L\delta_k \|\underline{v}_{\delta_k,\varepsilon} - \underline{v}\| \geq \varepsilon \delta_k - L\delta_k \|\underline{v}_{\delta_k,\varepsilon} - \underline{v}\|$. Poi dividiamo per δ_k ed otteniamo $f(\delta_k \underline{v}) \geq \varepsilon - L\|\underline{v}_{\delta_k,\varepsilon} - \underline{v}\|$ ossia $f(\delta_k \underline{v}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ per k abbastanza grande da cui la non derivabilità .

Resta da dimostrare la stessa proprietà per funzioni definite su $\mathbf{R}^n$ con $n > 2$.

28.7 Il vincolo ha equazione $2x^2+2y^2+2xy = a^2$. Come al solito attraverso una rotazione (nella fattispecie $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y') \end{cases}$) esso diventa $g(x', y') = \frac{3}{2}(x')^2 + \frac{5}{2}(y')^2 = a^2$ mentre la funzione da studiare diventa $f(x', y') = \frac{1}{2}((y')^2 - (x')^2)$. La funzione $F(x, y) = f(x', y') - \lambda g(x', y')$ ha i seguenti punti critici $(x', y', \lambda) = (0, \pm a\sqrt{\frac{2}{5}}, \frac{1}{5})$ e $(x', y', \lambda) = (\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, -\frac{1}{3})$. Per studiarne la natura si può ragionare in diversi modi. La prima osservazione è che il vincolo è un sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}^2$ e la funzione da studiare è continua per cui ammette massimo e minimo. Inoltre la funzione $f(x', y')$ è pari tanto in x' che in y'. Ne segue che in $(\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ ha due minimi e due massimi in $(0, \pm a\sqrt{\frac{2}{5}})$.

Un secondo modo di procedere consiste nello studiare la forma quadratica $f_{x_i^o x_j^o} - \lambda^o g_{x_i^o x_j^o}$ ristretta ai vettori tangenziali al vincolo. $f_{x_i x_j} - \lambda g_{x_i x_j} = \begin{pmatrix} -1-3\lambda & 0 \\ 0 & 1-5\lambda \end{pmatrix}$, e calcolata in $\frac{1}{5}$ dà $\begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. I vettori ortogonali al vincolo nei punti $(0, \pm a\sqrt{\frac{2}{5}})$ sono proporzionali al vettore

$(0,\beta)$ con $\beta\in\mathbf{R}$ e quindi quelli tangenziali sono proporzionali a $(\alpha,0)$. $(\alpha,\,0)\begin{pmatrix}\frac{-8}{5} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\end{pmatrix}$ $=-\frac{8}{5}\alpha^2$ e quindi i punti sono di massimo. Lo stesso calcolo per gli altri punti consente di dire che sono dei minimi. È opportuno notare che la matrice ha un autovalore negativo ed un autovalore nullo e quindi è semidefinita negativa. Diventa definita negativa proprio quando ci si restringe agli spostamenti tangenziali al vincolo

Un terzo modo (in realtà equivalente al primo) è il seguente: una volta arrivati a $f(x',y')=\frac{1}{2}((y')^2-(x')^2)$ e $g(x',y')=\frac{3}{2}(x')^2+\frac{5}{2}(y')^2=a^2$, si sostituisce ad esempio $(x')^2=\frac{2}{3}a^2-\frac{5}{3}(y')^2$ nella prima ottenendo $f(x',y')=\frac{1}{2}((y')^2+\frac{5}{3}(y')^2-\frac{2}{3}a^2)$ e la si studia come funzione di una variabile

29.7 Conviene osservare che il vincolo è rappresentato dall'intersezione delle due superfici $x^2+y^2+z^2=2$, e $x^2+y^2=z$ (una sfera e un paraboloide) che danno come risultato $z=-2$ oppure $z=1$. In $\mathbf{R}^3$ rappresentano due piani ma solo $z=1$ ha significato in quanto il paraboloide ha ordinata z non negativa. La funzione da massimizzare o minimizzare è $f(x,y,z)=x+y+z$ ma essendo z fissato, essa diventa $f(x,y,z)=x+y+1$. Applicando la teoria dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo la funzione $F(x,y)=x+y+1-\lambda(x^2+y^2-1)$ le cui derivate ci danno: $F_x=1-2\lambda x=0$, $F_y=1-2\lambda y=0$, $F_\lambda=x^2+y^2-1=0$. Dalle prime due si ha $x=y=\frac{1}{2\lambda}$ che sostituite nell'ultima danno $\lambda^2=\frac{1}{2}$ e quindi $\lambda=\pm\frac{1}{2}$. Si ottengono quindi due punti: $P_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,1)$ e $P_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,-1)$. Chiaramente $f(P_1)>f(P_2)$. Il vincolo è dato da un insieme chiuso e limitato e la funzione da massimizzare/minimizzare è continua per cui, dal teorema di Weierstrass, tale massimo e minimo devono esistere (magari non unici). Non può che essere dunque P_1 massimo e P_2 minimo.

31.7 1) Supponiamo che $f'(x)$ esista. Dobbiamo far vedere esiste il limite bidimensionale del testo e che vale $f'(x)$.
$\frac{f(x_o+h)-f(x_o-k)}{h+k}=\frac{h}{h+k}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-\frac{-k}{h+k}\frac{f(x_o-k)-f(x_o)}{-k}=\frac{h}{h+k}\Big(\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-f'(x_o)\Big)+\frac{k}{h+k}\Big(\frac{f(x_o-k)-f(x_o)}{-k}-f'(x_o)\Big)+f'(x_o)$
La funzione di due variabili $\frac{h}{h+k}$, pur non ammettendo limite per $(h,k)\to(0,0)$ è limitata per $h>0$, e $k>0$ così come $\frac{k}{h+k}$. Ne segue che la funzione di due variabili $\frac{h}{h+k}\Big(\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}-f'(x_o)\Big)$ ha come limite zero avendo il secondo fattore limite zero per ipotesi. Lo stesso dicasi per $\frac{k}{h+k}\Big(\frac{f(x_o-k)-f(x_o)}{-k}-f'(x_o)\Big)$
Viceversa supponiamo che esista il limite bidimensionale e valga l. Eseguiamo il limite ponendo $k\equiv 0$. Quello che otteniamo è la derivata destra che vale l. Ponendo $h\equiv 0$ ed eseguendo il limite otteniamo che la derivata sinistra è l da cui il fatto che $l=f'(x)$.

2) Scrivendo $\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta}=\big(\frac{f(\xi)-f(x_o)}{\xi-x_o}-f'(x_o)\big)\frac{\xi-x_o}{\xi-\eta}+\big(\frac{f(x_o)-f(\eta)}{x_o-\eta}-f'(x_o)\big)\frac{x_o-\eta}{\xi-\eta}+f'(x_o)$ si ricade nel caso 1).

3) Se $f'(x)$ esiste ciascuno dei due limiti $\lim_{(x,y)\to(x_o,x_o)}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, $\lim_{(x,y)\to(x_o,x_o)}\frac{f(y)-f(x_o)}{y-x_o}$ per definizione è $f'(x)$ e quindi la differenza è zero. Supponiamo viceversa che il limite faccia zero. Se la funzione non è derivabile allora possono verificarsi due evenienze. La prima è che $f'(x_o^+)\neq f'(x_o^-)$ oppure non esiste almeno una delle due derivate. Se $f'(x_o^+)=l$ e $f'(x_o^-)=l'$ con $l\neq l'$ si ha $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=l+o(1)$ con $x>x_o$ e $\frac{f(y)-f(x_o)}{y-x_o}=l'+o(1)$ con $y<x_o$. Ne segue che $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}-\frac{f(y)-f(x_o)}{y-x_o}=l-l'+o(1)$ e quindi il limite non può essere zero.

Supponiamo che non esista una delle due derivate al contrario dell'altra ossia $f'(x_o^+)=l$ ma non esiste il limite $\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))$ (che è chiaramente la derivata sinistra della funzione). Ciò vuol dire che $\forall\ l\in\mathbf{R}\ \exists\ \varepsilon_l\ t.c.\forall\ \delta>0\ \exists\ \xi_\delta\in(x_o-\delta,x_o)\ t.c.|\frac{f(\xi_\delta)-f(x_o)}{\xi_\delta-x_o}-l|\geq\varepsilon_l$ e si tenga

presente la arbitrarietà di l.
Per $\eta > x_o$ costruiamo la funzione $|\frac{f(\xi_\delta)-f(x)}{\xi_\delta - x} - \frac{f(\eta)-f(x)}{\eta - x}| = |\Big(\frac{f(\xi_\delta)-f(x)}{\xi_\delta - x} - l\Big) - \Big(\frac{f(\eta)-f(x)}{\eta - x} - l\Big)| \geq \varepsilon_l - o(1)$ se η è abbastanza vicina a x_o e quindi il limite non può far zero.
Se supponiamo che non esista tanto $f'(x_o^+)$ quanto $f'(x_o^-)$ si ripete il ragionamento. Abbiamo $\forall\ l \in \mathbf{R}\ \exists\ \varepsilon_l\ t.c. \forall\ \delta > 0\ \exists\ \xi_\delta \in (x_o - \delta, x_o)\ t.c. |\frac{f(\xi_\delta)-f(x_o)}{\xi_\delta - x_o} - l| \geq \varepsilon_l$ e
$\forall\ q \in \mathbf{R}\ \exists\ \varepsilon_q\ t.c. \forall\ \delta > 0\ \exists\ \eta_\delta \in (x_o, x_o + \delta)\ t.c. |\frac{f(\eta_\delta)-f(x_o)}{\eta_\delta - x_o} - q| \geq \varepsilon_q$
Prendiamo $\overline{\varepsilon}_l \leq \varepsilon_l$ e $\overline{\varepsilon}_q \leq \varepsilon_q$ $(l \neq q)$ tale che $\overline{\varepsilon}_l + \overline{\varepsilon}_q \leq \frac{1}{2}|l - q|$. Ne segue $|\frac{f(\xi_\delta)-f(x)}{\xi_\delta - x} - \frac{f(\eta_\delta)-f(x)}{\eta_\delta - x}| = |\Big(\frac{f(\xi_\delta)-f(x)}{\xi_\delta - x} - l\Big) - \Big(\frac{f(\eta_\delta)-f(x)}{\eta_\delta - x} - q\Big) + (l - q)| \geq |l - q| - \overline{\varepsilon}_l - \overline{\varepsilon}_q \geq \frac{1}{2}|l - q|$ qualsiasi sia $\delta > 0$ da cui la impossibilità del limite di essere zero.

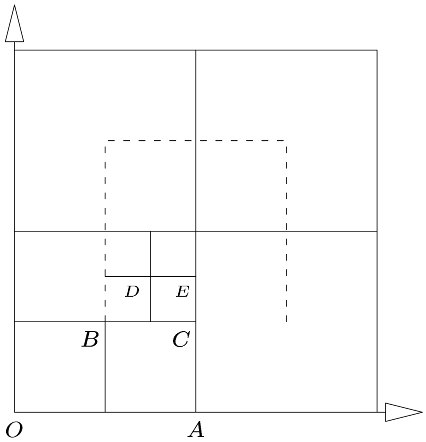
32.7**** Gli esempi sono diversi. Dapprima costruiamo una applicazione $f\colon [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ che sia suriettiva, non continua e non iniettiva. Successivamente costruiamo una applicazione che sia suriettiva e continua ma non iniettiva. Avere una applicazione continua, suriettiva e iniettiva (omeomorfismo) è impossibile
Sia $t \in [0,1]$ $t = 0, t_1 t_2 t_3, \ldots \stackrel{\rm def}{=} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{t_k}{2^k}$ lo sviluppo binario di t (chiaramente t_k vale zero oppure uno). Definiamo $x(t) = 0, t_2 t_4 t_6, \ldots = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{t_{2k}}{2^k}$ e $y(t) = 0, t_1 t_3 t_5, \ldots, = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{t_{2k-1}}{2^k}$. Per evitare ambiguità supponiamo che nello sviluppo di t vi siano sempre infiniti zeri. L'applicazione $f(t) \stackrel{\rm def}{=} (x(t), y(t))$ è chiaramente suriettiva. Infatti se $(x_o, y_o) \in [0,1] \times [0,1]$ e $x_o = 0, a_1 a_2 \ldots$, $y_o = 0, b_1 b_2 \ldots$, allora $f(0, a_1 b_1 a_2 b_2, \ldots) = (x_o, y_o)$.
L'applicazione non è continua in $t = \frac{1}{4}$. Infatti la successione $t_1 = 0,00100\ldots$, $t_2 = 0,001100\ldots$, $t_2 = 0,0011100\ldots$, converge al valore $0,01$ e $f(0,01) = (\frac{1}{2}, 0)$. Invece $\lim_{n \to +\infty} f(t_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e quindi non è continua. Chiaramente non è continua neppure nei punti 2^{-r} con r intero per le stesse ragioni. La ragione sta nella scelta fatta di utilizzare espansioni che contengano infiniti zeri. Quindi $t_n \to 0,00\overline{1}$ ma $f(0,00\overline{1}) \stackrel{\rm def}{=} f(0,01)$. Se si usasse la convenzione che nello sviluppo binario di $t \in [0,1]$ devono esserci infiniti 1 invece di zero, allora si otterrebbe la continuità . Nel caso precedente infatti, la successione t_n convergerebbe al valore $0,00\overline{1}$ e $f(0,00\overline{1}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Non è neppure iniettiva. Infatti $f(0,11) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = f(0,10\overline{01})$ in quanto $x(0,10\overline{01}) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$ e $y(0,10\overline{01}) = 2^{-1}$

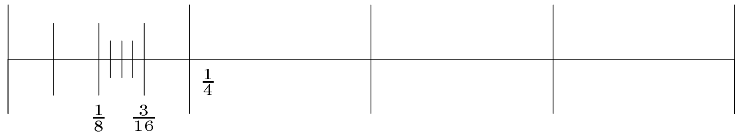
Dovuto a Hilbert è un secondo esempio di "curva che riempie lo spazio". Per la sua costruzione si divida l'intervallo $[0,1]$ nei quattro segmenti $I_1 = [0, \frac{1}{4}]$, $I_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $I_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $I_4 = [\frac{3}{4}, 1]$ e facciamo corrispondere a ciascun intervallo un quadrato contenuto all'interno del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ secondo la regola: a I_1 corrisponde $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$, a I_2 corrisponde $[0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$, a I_3 corrisponde $[\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$, a I_4 corrisponde $[\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$. Siano Q_i $i = 1, \ldots, 4$ i quattro quadrati. Ciascun intervallo $I_1, \ldots, I_4$ viene suddiviso allo stesso modo e gli vengono fatti corrispondere quattro quadrati secondo la regola di prima. Ad esempio I_1 viene suddiviso in I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}, dove $I_{11} = [0, \frac{1}{8}]$ e via dicendo per gli altri. A I_{1j} corrispondono i quattro quadrati Q_{1j} $j = 1, \ldots 4$ dove, ad esempio $Q_{11} = [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$ e via dicendo. Ad ogni punto dell'intervallo $[0,1]$ è associata in modo unico una successione di intervalli $\{I_{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$ i_j intero, $1 \leq i_j \leq 4$, e quindi è associata una successione di quadrati $\{Q_{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$. Tali quadrati hanno diametro tendente a zero, sono inclusi l'uno nell'altro e quindi hanno intersezione non vuota e unica che chiamiamo y. La funzione che definiamo è quella che ad x associa y secondo la regola appena descritta.

La funzione $f(x)$ è continua. Infatti sia $a \in [0,1]$ e sia $x_k \to a$. Per ogni n identifichiamo l'intervallo $\{I_{i_1 i_2 \ldots i_n}\} \ni a$ (per alcuni punti possono esservi due intervalli; ad esempio per $x = \frac{1}{2}$). Dalla convergenza di x_k ad a segue che da un certo k_n in poi i punti x_k stanno dentro l'intervallo

$I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ (eventualmente una parte dentro l'intervallo scritto e un'altra parte parte dentro il secondo intervallo che non abbiamo indicato). Ciò implica che $f(x_k)$ per $k > k_n$ sta dentro un quadrato (eventualmente due) che contiene a e per costruzione, per $n \to +\infty$ l'area del quadrato tende a zero che è come dire che $f(x_k) \to f(a)$

La funzione non è iniettiva. Infatti $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{5}{6}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$





Al segmento $(0, \frac{1}{4})$ corrisponde il quadrato di lato OA. Al segmento $(\frac{1}{8}, \frac{3}{16})$ corrisponde il quadrato di lato BC. Dalla ulteriore suddivisione dell'intervallo $(\frac{1}{8}, \frac{3}{16})$ si prende il terzo sottointervallo dato da $(\frac{5}{32}, \frac{11}{64})$ al quale corrisponde il quadrato di lato DE e via dicendo. Al termine del processo, sul segmento si converge verso il punto $\frac{5}{6}$ e sul quadrato verso il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

33.7* Se f fosse iniettiva allora sarebbe invertibile e per l'esercizio **70.5** l'inversa sarebbe continua. Ora consideriamo il quadrato dal quale abbiamo tolto tre punti nessuno dei quali ha come controimmagine sul segmento 0 oppure 1. Il quadrato rimane connesso e quindi l'immagine inversa, che è un sottoinsieme del segmento $[0, 1]$ è anche esso connesso dall'esercizio **71.5**. Ma questo è impossibile perché togliendo tre punti da un segmento lo si sconnette.

34.7** Facciamo vedere che $(0, 0)$ è un massimo relativo (usare l'hessiano è inutile). È sufficiente far vedere che in un intorno dell'origine si ha $y^2 - 2y(x^2 + x^3) + x^6 + x^4 - x^5 > 0$. Si ha $\Delta = 3x^5$ e se $x < 0$ allora la disequazione è vera per ogni valore di y. Se $\Delta > 0$ ossia $x > 0$ si hanno due radici reali date da $y_{1,2}, = x^2 + x^3 \pm 3^{1/2} x^{5/2}$. Se x è piccola si ha $y_1 = x^2 + x^3 - 3^{1/2} x^{5/2} > 0$ (fatto questo essenziale) e la soluzione è $y < y_1$ oppure $y > y_2$. Ne segue che se $|x|$ è sufficientemente piccolo allora per $y_1 < y < y_2$ si ha $f(x, y) > 0$ e quindi $(0, 0)$ è un massimo non assoluto

Che $(0, 0)$ è l'unico punto critico lo si vede derivando $f_x = -6x^5 - 4x^3 + 4yx^2 + 6yx^3 + 3x^2 = 0$ e $-2y + 2x^2 + 5x^4 = 0$. I due sistemi generano l'equazione $15x^4 = 0$ che ha $x = 0$ come unica soluzione.

Nel secondo caso si ha ancora l'unico punto critico $(0, 0)$ e l'equazione $f(x, y) = 0$ ha come discriminante $\Delta = 3x^3 + x^5 = x^3(3 + x^2)$ per cui $f(x, y) < 0$ sempre per $x < 0$. Se $x > 0$ si ha $f(x, y) < 0$ per $y < y_1$ oppure $y > y_2$ dove $y_2 = -x - x^2 + \sqrt{3x^3 + x^5} < 0$ se x è sufficientemente piccolo. Quindi $(0, 0)$ è effettivamente un massimo. Per $y_1 < y < y_2$ si ha $f(x, y) > 0$ e quindi il massimo non è assoluto (proprietà peraltro evidente anche dal fatto che $\lim_{x \to \infty} f(x, 0) = +\infty$)

35.7**

$$\partial_x f(\underline{x}) = \begin{cases} 2x \dfrac{x^4 - y^4 + 2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \dfrac{3}{2} y & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases} \qquad \partial_y f(\underline{x}) = \begin{cases} 2y \dfrac{y^4 - x^4 + 2x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \dfrac{3}{2} x & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

$$\partial_{xx} f(\underline{x}) = \begin{cases} 2\dfrac{y^6+3x^4y^2+9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 2 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases}$$
$$\partial_{yy} f(\underline{x}) = \begin{cases} 2\dfrac{x^6+3y^4x^2+9y^2x^4-x^6}{(x^2+y^2)^3} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ 2 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases}$$
$$\partial_{xy} f(\underline{x}) = \begin{cases} -16\dfrac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ -3/2 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases} \qquad \partial_{yx} f(\underline{x}) = \begin{cases} -16\dfrac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} & \underline{x}\neq \underline{0} \\ -3/2 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases}$$

Nell'articolo, l'autore chiede che la funzione $f(x,y)$ sia *due volte Gateaux–differenziabile in* $\underline{x}_o$. Ciò vuol dire:
1) deve esistere per ogni $\underline{h}\in\mathbf{R}^2$ e per ogni $\underline{x}$ in un intorno di $\underline{0}$ il limite $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(\underline{x}+t\underline{h})-f(\underline{x}))$. Chiamiamo $f'_{\underline{x}}(\underline{h})$ tale limite
2) $f'_{\underline{0}}(\underline{h})$ deve essere lineare in $\underline{h}$
3) ciascuna derivata parziale $\partial_x f$ e $\partial_y f$ deve soddisfare il punto 1) con $\partial_x f$ prima e $\partial_y f$ poi al posto di f.
La funzione proposta non soddisfa la richiesta in quanto, ad esempio $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\partial_x(t\underline{h}) = h_1(h_1^4+2h_1^2h_2^2-h_2^4)$ e *non è una funzione lineare del vettore* $\underline{h}$.
Per avere una funzione *due volte Gateaux–differenziabile*[(7.7)] si definisce

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & x^2<y<2x^2 \\ x^2+y^2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(7.7) nella referenza citata la funzione è : $f(\underline{x}) = \begin{cases} -1 & x\in S \\ x^2+y^2 & x\notin S \end{cases}$ dove S è la regione compresa all'interno delle due curve $f(\underline{x}) = \begin{cases} x=\cos\frac{\vartheta}{4}\cos\vartheta \\ y=\cos\frac{\vartheta}{4}\sin\vartheta \end{cases}$ $f(\underline{x}) = \begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos\frac{\vartheta}{4}\cos\vartheta \\ y=\frac{1}{2}\cos\frac{\vartheta}{4}\sin\vartheta \end{cases}$ e $0\leq\vartheta<2\pi$