Esercizio 587

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Risolvere la disequazione:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x} > x \tag{1}$$

Soluzione
Innanzitutto deve essere $x > 0$, giacché la funzione logaritmo è definita in $(0, +\infty)$.
Poi scriviamo: $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/2} x}$, donde la disequazione si scrive:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/2} x},$$

cioè:

$$\ln x < \log_{1/2} x, \tag{2}$$

giacché la base è < 1. Eseguiamo il cambiamento di base:

$$\ln x = \frac{\log_{1/2} x}{\log_{1/2} e} \Longrightarrow \log_{1/2} x = \log_{1/2} e \cdot \ln x$$

A questo punto rammentiamo la nota proprietà:

$$\log_a x = -\log_{1/a} x, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Da ciò segue:

$$\log_{1/2} x = -\log_2 e \cdot \ln x$$

Quindi la (2) diventa:

$$\ln x\,(1 + \log_2 e) < 0 \Longleftrightarrow \ln x < 0 \Longleftrightarrow x \in (0, 1)$$

Si conclude che la soluzione della (1) è l'intervallo aperto $(0, 1)$.

Esercizio 588

Risolvere la disequazione:

$$2^{3x} + 3 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 > 0 \tag{3}$$

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = 2^x$, donde la (3) si scrive:

$$t^3 + 3t^2 - 3t - 1 > 0 \tag{4}$$

Cioè:

$$(t-1)\left(t^2+4t+1\right)>0 \Longleftrightarrow t \in \left(-\left(2+\sqrt{3}\right), \sqrt{3}-2\right) \cup (1,+\infty) \tag{5}$$

Osservando che $-\left(2+\sqrt{3}\right), \sqrt{3}-2<0$ e che $t=2^x>0$ segue che la soluzione che ci interessa è l'insieme dei valori $t \in (1,+\infty)$, cioè $2^x>1 \Longrightarrow x \in (0,+\infty)$.
Si conclude che la soluzione della disequazione assegnata è l'intervallo $(0,+\infty)$.

Esercizio 589

Risolvere la disequazione:

$$\frac{5^{3x^2}+5^{x^2}}{2\cdot\left(5^x\right)^x} \leq 5^{x^2} \tag{6}$$

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile

$$t=5^{x^2}, \tag{7}$$

donde la (6) si scrive:

$$\frac{t^3+t}{2t} \leq t \Longleftrightarrow \frac{t^3-2t^2+t}{2t} \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{t\,(t-1)^2}{2t} \leq 0 \Longleftrightarrow t=1 \tag{8}$$

Cioè abbiamo l'unica soluzione $t=1$. Ripristinando la variabile x attraverso la (7):

$$5^{x^2}=1 \Longrightarrow x^2=0 \Longrightarrow x=0$$

Si conclude che la disequazione assegnata ammette come l'unica soluzione $x=0$.

Esercizio 590

Risolvere la disequazione:

$$\frac{\log_a(4x-3)}{\log_a(2x-1)}>1, \quad \text{con } 0<a<1 \tag{9}$$

Soluzione
Innanzitutto deve essere:

$$4x-3>0,\ 2x-1>0,\ \log_a(2x-1) \neq 0$$

Cioè:

$$x \in \left(\frac{4}{3}, 1\right) \cup (1,+\infty) \tag{10}$$

La (9) è equivalente a:

$$\frac{\log_a(4x-3)-\log_a(2x-1)}{\log_a(2x-1)}>0 \tag{11}$$

Quindi dobbiamo studiare il segno del rapporto (11). Iniziamo a determinare l'insieme dei valori di x che rendono il numeratore positivo, cioè le soluzioni della disequazione:

$$\log_a (4x-3) - \log_a (2x-1) > 0,$$

equivalente alla:

$$\log_a \frac{4x-3}{2x-1} > 0 \Longleftrightarrow 0 < \frac{4x-3}{2x-1} < 1$$

Ma se x appartiene all'insieme (10) è $\frac{4x-3}{2x-1} > 1$, quindi $\log_a \frac{4x-3}{2x-1} < 0$, cosicché:

$$\forall x \in \left(\frac{4}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty), \quad \log_a (4x-3) - \log_a (2x-1) < 0$$

Passiamo al denominatore della (11).

$$\forall x \in \left(\frac{4}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty), \quad \log_a (2x-1) < 0,$$

donde la (11) è verificata per x appartente all'insieme (10). Si conclude che la soluzione della disequazione assegnata è l'insieme $\left(\frac{4}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$.

Esercizio 592

Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + 2 > \frac{x}{3} + 1 \\ x^2 + 3x - 10 < 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$$

***

Soluzione
Risolviamo separatamente le tre disequazioni.

$$\frac{3}{5}x + 2 > \frac{x}{3} + 1 \Longleftrightarrow 4x > -15,$$

per cui la soluzione della prima è:

$$S_1 = \left(-\frac{15}{4}, +\infty\right)$$

Passiamo alla seconda. Determiniamo le soluzioni dell'equazione:

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Longleftrightarrow x = -5, 2$$

Quindi:

$$S_2 = (-5, 2)$$

In maniera simile per la terza, risolvendo prima l'equazione:

$$x^2 + x - 2 = 0 \iff x = -2, 1$$

da cui:

$$S_3 = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

Perciò il sistema assegnato è soddisfatto per tutti i valori di x appartenente al seguente insieme:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left(-\frac{15}{4}, -2\right) \cup (1, 2)$$

Esercizio 593

Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 0 \\ 2x^2 - 15x + 7 < 0 \end{cases}$$

***

Soluzione
Risolviamo separatamente le due disequazioni.

$$x^2 - 8x + 15 > 0$$

Troviamo le soluzioni dell'equazione:

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \iff x = 3, 5$$

Quindi:

$$S_1 = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$$

In maniera simile per la seconda, risolvendo prima l'equazione:

$$2x^2 - 15x + 7 = 0 \iff x = \frac{1}{2}, 7$$

da cui:

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}, 7\right)$$

Perciò il sistema assegnato è soddisfatto per tutti i valori di x appartenente al seguente insieme:

$$S = S_1 \cap S_2 = \left(-\frac{1}{2}, 3\right) \cup (5, 7)$$

Esercizio 594

Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 9 < 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases}$$

***

Soluzione
Risolviamo separatamente le tre disequazioni.

$$x^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow x \in S_1 = (-1, 1)$$

La seconda:

$$x^2 - 9 > 0 \Longleftrightarrow x \in S_2 = (-3, 3)$$

La terza

$$x - 7 > 0 \Longleftrightarrow x \in S_3 = (7, +\infty)$$

Il sistema assegnato è soddisfatto per tutti i valori di x appartenente al seguente insieme:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset,$$

cioè il sistema è incompatibile.

Esercizio 595

Si determinino i valori del parametro reale a tali che la seguente disequazione

$$(a - 2)\, x^2 + 2\,(2a - 3)\, x + 5a - 6 > 0, \tag{12}$$

sia verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

***

Soluzione
Abbiamo:

$$a \in \mathbb{R} \mid S = \mathbb{R}) \Longrightarrow \begin{cases} a - 2 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \tag{13}$$

essendo Δ il discriminante dell'equazione:

$$(a - 2)\, x^2 + 2\,(2a - 3)\, x + 5a - 6 = 0$$

Cioè:

$$\Delta = -a^2 + 4a - 3 \tag{14}$$

Quindi otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a-2>0 \\ -a^2+4a-3 \end{cases} \tag{15}$$

Soluzioni della prima di (15):

$$A_1 = (2, +\infty) \tag{16}$$

Soluzioni della seconda:

$$A_2 = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \tag{17}$$

Perciò il sistema (15) è soddisfatto per tutti i valori di $a \in A = A_1 \cap A_2 = (3, +\infty)$.
Si conclude che per $a > 3$, la dissequazione assegnata è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 596

Risolvere la seguente disequazione

$$\log_{10}\left(2x^2 - 7x + 103\right) > 2 \tag{18}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\log_{10}\left(2x^2 - 7x + 103\right) > 2 \Longleftrightarrow 2x^2 - 7x + 103 > 10^2, \tag{19}$$

cioè:

$$2x^2 - 7x + 3 > 0 \tag{20}$$

Troviamo le radici di:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 3 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \log_{10}\left(2x^2 - 7x + 103\right) > 2 &\Longleftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 > 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty) \end{aligned} \tag{21}$$

Esercizio 597

Risolvere la seguente disequazione

$$\log_{10}\left(x^2 - 7x + 11\right) < 0 \tag{22}$$

***

Soluzione
La disequazione assegnata è equivalente al sistema di disequazioni razionali:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 11 > 0 \\ x^2 - 7x + 11 < 1 \end{cases} \tag{23}$$

Risolviamo la prima, trovando le radici dell'equazione:

$$x^2 - 7x + 11 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Quindi la prima è verificata per $x \in S_1 = \left(-\infty, \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.
Passiamo alla seconda.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Longleftrightarrow x = 5, 2$$

donde la seconda è verificata per $x \in S_2 = (2, 5)$
Quindi la disequazione assegnata è soddisfatta per $x \in S = S_1 \cap S_2 = \left(2, \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}, 5\right)$.

Esercizio 598

Risolvere la seguente disequazione

$$3 \cdot 5^{2(2x-7)} - 4 \cdot 5^{2x-7} + 1 > 0 \tag{24}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = 5^{2x-7}, \tag{25}$$

cosicché la disequazione assegnata equivale alla seguente disequazione razionale:

$$3t^2 - 4t + 1 > 0 \tag{26}$$

Troviamo le radici dell'equazione:

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Longleftrightarrow t = 1, \frac{1}{3}$$

Quindi:

$$3t^2 - 4t + 1 > 0 \Longleftrightarrow t < \frac{1}{3}, t > 1 \tag{27}$$

Per la (25):

$$5^{2x-7} < \frac{1}{3},\ 5^{2x-7} > 1 \tag{28}$$

La soluzione della disequazione assegnata è l'unione delle soluzioni delle disequazioni (28). Quindi se S_1 e S_2 sono gli insiemi dei valori di x tali che le rispettive disequazioni sono soddisfatte, allora la soluzione della (24) è $S = S_1 \cup S_2$.

$$5^{2x-7} < \frac{1}{3} \Longrightarrow x < \frac{1}{2}\left(7 - \log_5 3\right) = \frac{7\log_{10} 5 - \log_{10} 3}{2}$$

Cioè

$$S_1 = \left(-\infty, \frac{7\log_{10} 5 - \log_{10} 3}{2}\right)$$

La seconda:

$$5^{2x-7} > 1 \Longrightarrow 2x - 7 > 0 \Longrightarrow x > \frac{7}{2}$$

Cioè:

$$S_2 = \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$$

Si conclude che:

$$S = \left(-\infty, \frac{7\log_{10} 5 - \log_{10} 3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$$

Esercizio 599

Risolvere la seguente disequazione

$$\ln\left(\frac{1}{2} - |\sin x|\right) > 0, \tag{29}$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

***

Soluzione
La (29) equivale al sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - |\sin x| > 0 \\ \frac{1}{2} - |\sin x| < 1 \end{cases}, \tag{30}$$

cioè:

$$\begin{cases} |\sin x| < \frac{1}{2} \\ |\sin x| > -\frac{1}{2} \end{cases} \iff |\sin x| < \frac{1}{2}, \tag{31}$$

giacchè $|\sin x| > -\frac{1}{2}$ è sempre verificata.
Per una nota proprietà del valore assoluto, la disequazione $|\sin x| < \frac{1}{2}$ equivale al sistema:

$$\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2} \\ \sin x > -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{32}$$

La prima delle (32) è verificata per $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, 2\pi\right]$, mentre la seconda per $x \in \left[0, \frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{6}, 2\pi\right]$, per cui eseguendo l'intersezione dei due insiemi, si ottiene:

$$S = \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{6}\pi, 2\pi\right] \tag{33}$$

Allo stesso risultato (33) si perviene risolvendo la disequazione per via grafica. Precisamente, basta tracciare il grafico di $|\sin x|$ in $[0, 2\pi]$, per poi determinare gli intervalli tali che $|\sin x| < 1/2$, come riportato in figura (1).

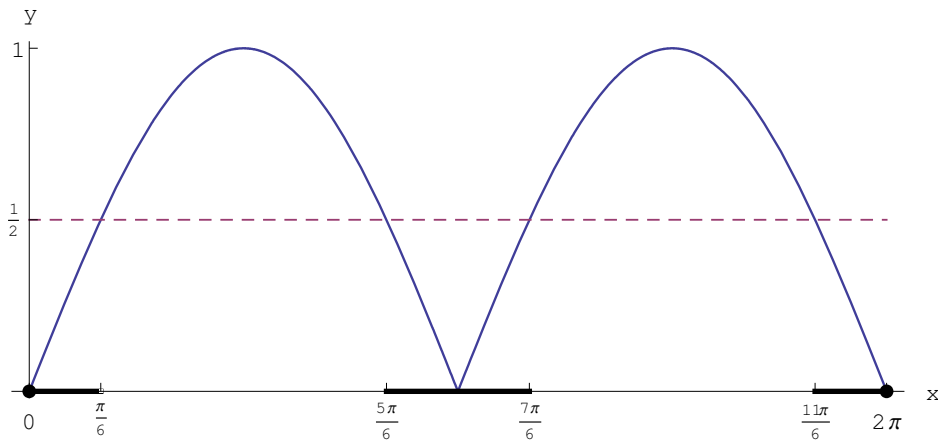

Figure 1: Grafico di $|\sin x|$ in $[0, 2\pi]$.

Esercizio 600

Risolvere la seguente disequazione

$$2\sin^2 x - \cos x - 1 > 0, \tag{34}$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

***

Soluzione
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, quindi

$$2\sin^2 x - \cos x - 1 > 0 \Longleftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 < 0 \tag{35}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \cos x, \tag{36}$$

cosicchè

$$2t^2 + t - 1 < 0$$

Risolvendo l'equazione

$$2t^2 + t - 1 = 0 \Longleftrightarrow t = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Perciò:

$$2t^2 + t - 1 < 0 \Longleftrightarrow -1 < t < \frac{1}{2}$$

Ripristinando la variabile x:

$$-1 < \cos x < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$$

Esercizio 601

Risolvere la seguente disequazione

$$\left|x^2 - 9x + 7\right| < 7, \tag{37}$$

***

Soluzione
Per una nota proprietà del valore assoluto la (37) è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 7 < 7 \\ x^2 - 9x + 7 > -7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x < 0 \\ x^2 - 9x + 14 > 0 \end{cases}$$

La prima è verificata per $x \in S_1 = (0, 9)$. Per risolvere la seconda determiniamo le radici dell'equazione:

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \Longleftrightarrow x = 7, 2$$

cosicchè:

$$x^2 - 9x + 14 > 0 \Longleftrightarrow x \in S_2 = (-\infty, 2) \cup (7, +\infty)$$

Si conclude che la disequazione assegnata è soddisfatta per:

$$x \in S = S_1 \cap S_2 = (0, 2) \cup (7, 9)$$

Esercizio 602

Risolvere la seguente disequazione

$$\sqrt{x^2 - 2x - 15} \geq x + 9, \tag{38}$$

***

Soluzione
L'insieme delle soluzioni della (38) è l'unione dell'insieme delle soluzioni dei sistemi seguenti:

$$a) \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq (x+9)^2 \\ x + 9 \geq 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 \\ x + 9 < 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema a otteniamo che esso è verificato per x appartenente al seguente insieme:

$$S_1 = \left[-9, -\frac{24}{5}\right]$$

Per il sistema b:

$$S_2 = (-\infty, -9]$$

Quindi

$$S = S_1 \cup S_2 = \left(-\infty, -\frac{24}{5}\right]$$