Esercizio 379

Determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = (1 + x^2) \arctan x$
2. $f(x) = \sin kx$
3. $f(x) = \cos 5x$
4. $f(x) = \tan 3x$
5. $f(x) = \arcsin 4x$
6. $f(x) = e^{kx}$

***

Soluzione

1. $f'(x) = 2x \arctan x + 1$
2. $f'(x) = k \cos kx$
3. $f'(x) = -5 \sin 5x$
4. $f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x} = 3(1 + \tan^2 3x)$
5. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}}$
6. $f'(x) = ke^{kx}$

Esercizio 380

Assegnata la funzione:

$$f(x) = 3x^2 - x, \tag{1}$$

calcolare Δf e df.

***

Soluzione
L'incremento è:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 3x^2 + x,\end{aligned}$$

da cui:

$$\Delta f = (6x - 1)\,\Delta x + 3\,(\Delta x)^2 \tag{2}$$

Osserviamo che la (2) è la decomposizione dell'incremento di f nel differenziale e in un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx, per cui:

$$df = (6x - 1)\,\Delta x = (6x - 1)\,dx \tag{3}$$

Alternativamente, il differenziale può essere calcolato attraverso la derivata:

$$df = f'(x)\,dx = (6x - 1)\,dx$$

Esercizio 381

Assegnata la funzione:

$$f(x) = 3x^2 - x, \tag{4}$$

calcolare Δf e df in $x = 1$ e per $\Delta x = 10^{-2}$.

***

Soluzione
L'incremento è:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= 3\,(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 3x^2 + x,\end{aligned}$$

da cui:

$$\Delta f = (6x - 1)\,\Delta x + 3\,(\Delta x)^2 \tag{5}$$

Osserviamo che la (5) è la decomposizione dell'incremento di f nel differenziale e in un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx, per cui:

$$df = (6x - 1)\,\Delta x \tag{6}$$

In $x = 1$:

$$\begin{aligned}\Delta f &= 5\Delta x + 3\,(\Delta x)^2 \\ df &= 5\Delta x\end{aligned}$$

e per $\Delta x = 10^{-2}$:

$$\begin{aligned}\Delta f &= 5 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-4} = 5.03 \cdot 10^{-2} \\ df &= 5 \cdot 10^{-2} \\ \Delta f - df &= 3 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

Esercizio 382

Assegnata la funzione:

$$f(x) = x^2 + 5x, \tag{7}$$

calcolare Δf e df in $x = 2$ e per $\Delta x = 10^{-3}$.

***

Soluzione
L'incremento è:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= (x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 5x - x^2,\end{aligned}$$

da cui:

$$\Delta f = (5 + 2x)\,\Delta x + (\Delta x)^2 \tag{8}$$

Osserviamo che la (8) è la decomposizione dell'incremento di f nel differenziale e in un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx, per cui:

$$df = (5 + 2x)\,\Delta x \tag{9}$$

In $x = 2$:

$$\begin{aligned}\Delta f &= 9\Delta x + (\Delta x)^2 \\ df &= 9\Delta x\end{aligned}$$

e per $\Delta x = 10^{-3}$:

$$\begin{aligned}\Delta f &= 9 \cdot 10^{-3} + 10^{-6} = 9.001 \cdot 10^{-3} \\ df &= 9 \cdot 10^{-3} \\ \Delta f - df &= 10^{-6}\end{aligned}$$

Esercizio 383

Assegnata la funzione:

$$f(x) = 1 - x^3, \tag{10}$$

calcolare, applicando la definizione, df in $x = 1$ e per $\Delta x = -\frac{1}{3}$.

***

Soluzione
L'incremento è:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= 1 - (x+\Delta x)^3 - 1 + x^3 \\ &= -3x^2\Delta x - 3x(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3,\end{aligned}$$

da cui:

$$\Delta f = -3x^2\Delta x - \left[3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right] \tag{11}$$

Osserviamo che la (11) è la decomposizione dell'incremento di f nel differenziale e in un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx, per cui:

$$df = -3x^2\Delta x \tag{12}$$

In $x = 1$:

$$df = -3\Delta x$$

e per $\Delta x = -\frac{1}{3}$:

$$df = 1$$

Esercizio 384

L'area S di un quadrato di lato x è:

$$S(x) = x^2 \tag{13}$$

Determinare l'incremento ΔS e il differenziale dS della funzione $S(x)$, dandone un'interpretazione geometrica.

***

Soluzione
L'incremento è:

$$\begin{aligned}\Delta S &= S(x+\Delta x) - S(x) \\ &= (x+\Delta x)^2 - x^2\end{aligned}$$

da cui:

$$\Delta S = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \tag{14}$$

Osserviamo che la (14) è la decomposizione dell'incremento di S nel differenziale e in un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx, per cui:

$$dS = 2x\Delta x \tag{15}$$

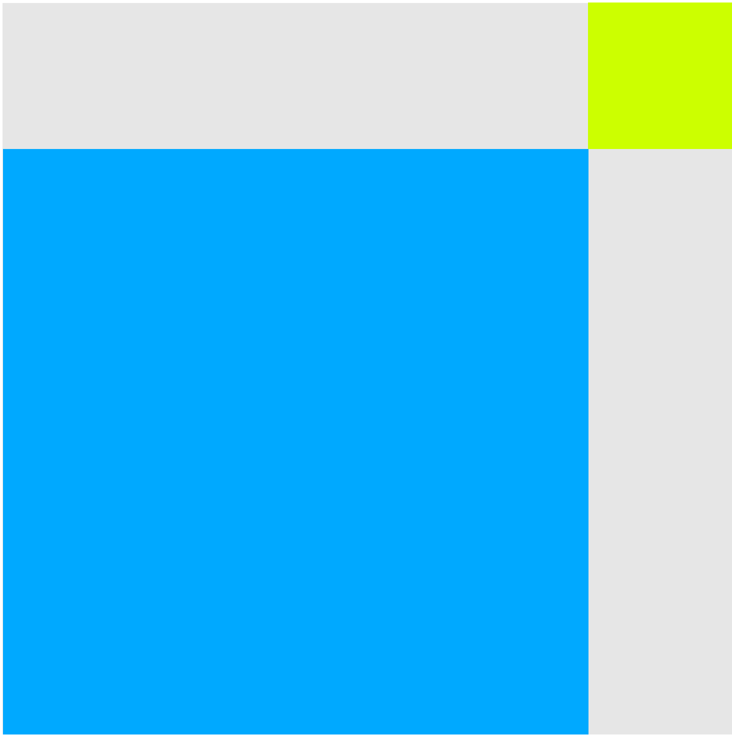

Figure 1: Il rettangolo azzurro ha lato di misura x, quindi l'area è $S(x) = x^2$. Se la variabile indipendente varia da x a $x + \Delta x$, la superficie varia di $\Delta S = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. La grandezza $2x\Delta x$ è la somma delle aree delle superfici in grigio, mentre l'infinitesimo del secondo ordine $(\Delta x)^2$ è la misura dell'area della superficie del rettangolino verde.

Esercizio 385

Mostrare che per $\Delta x \to 0$ l'incremento Δf della funzione:

$$f(x) = 2^x \tag{16}$$

relativo all'incremento Δx di x per ogni $x \in \mathbb{R}$, è equivalente all'espressione $2^x \Delta x \ln 2$

***

Soluzione
L'incremento è:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= 2^{x+\Delta x} - 2^x \\ &= 2^x \left(2^{\Delta x} - 1\right) \end{aligned}$$

da cui:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2^{\Delta x} - 1}{2^{\Delta x}} = 2^x \ln 2 \neq 0, \, \forall x \in \mathbb{R} \tag{17}$$

Quindi $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta che Δf e Δx sono infinitesimi dello stesso ordine. Dalla (17):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{2^x \Delta x \ln 2} = 1 \Longleftrightarrow \Delta f \sim 2^x \Delta x \ln 2, \text{ per } \Delta x \to 0$$

Esercizio 386

Determinare per quali valori della variabile indipendente il differenziale della funzione:

$$f(x) = x^2$$

non è equivalente (per $\Delta x \to 0$) all'incremento Δf.

***

Soluzione
L'incremento è:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

da cui:

$$df = 2x\Delta x$$

Inoltre:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x = f'(x)$$

Quindi $x \in \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow \Delta f$ e Δx infinitesimi dello stesso ordine (per $\Delta x \to 0$), perciò $\Delta f \sim 2x\Delta x$ per $\Delta x \to 0$.
Per $x = 0$, al tendere di Δx a zero, Δf è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δx, per cui nel punto $x = 0$ l'incremento Δf non è equivalente al differenziale df.

Esercizio 387

Calcolare il differenziale della funzione

$$f(x) = \cos x$$

nel punto $x = \frac{\pi}{6}$ e per $\Delta x = \frac{\pi}{36}$

***

Soluzione
La derivata è

$$f'(x) = -\sin x$$

da cui il differenziale:

$$df = -\sin x dx$$

Nel punto $x = \frac{\pi}{6}$:

$$df = -\frac{\Delta x}{2}$$

In tale punto per $\Delta x = \frac{\pi}{6}$ risulta:

$$df = -\frac{\pi}{72}$$

Esercizio 388

Calcolare il differenziale della funzione

$$f(x) = \tan x$$

nel punto $x = \frac{\pi}{3}$ e per $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

***

Soluzione
La derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

da cui il differenziale:

$$df = \frac{\Delta x}{\cos^2 x}$$

Nel punto $x = \frac{\pi}{3}$:

$$df = 4\Delta x$$

In tale punto per $\Delta x = \frac{\pi}{180}$ risulta:

$$df = \frac{\pi}{45}$$