

Esercizio 312

Verificare che il diagramma della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2},$$

ha nel punto $(0, 0)$ una cuspide (punto di regresso).

Soluzione

Applichiamo la definizione di derivata:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Questo limite non esiste, per cui calcoliamo la derivata sinistra e destra:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

Si conclude che $(0, 0)$ è una cuspide o *punto di regresso*. Quest'ultima denominazione deriva dal fatto che se $\gamma) y = f(x)$ è la traiettoria di un punto materiale, si ha che quando il punto transita per la cuspide, il vettore velocità inverte il verso conservando la direzione.

Esercizio 313

Verificare che il punto $P_0(0, 1)$ è un punto angoloso per il diagramma della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Soluzione

Calcoliamo le derivate destra e sinistra nel punto $x = 0$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + (+\infty)} = 0$$

Quindi $P_0(0, 1)$ è un punto angoloso. Le equazioni delle rette tangenti a sinistra e a destra sono:

$$\tau_-) y = 1 + f'_-(0)x = x + 1$$

$$\tau_+) y = 1 + f'_+(0)x = 1$$

Esercizio 314

Verificare che il punto $P_0(0, 1)$ è un punto angoloso per il diagramma della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Soluzione

Calcoliamo le derivate destra e sinistra nel punto $x = 0$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = 1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + (+\infty)} = 0 \end{aligned}$$

Quindi $P_0(0, 1)$ è un punto angoloso. Le equazioni delle rette tangenti a sinistra e a destra sono:

$$\begin{aligned} \tau_-) \quad y &= 1 + f'_-(0)x = x + 1 \\ \tau_+) \quad y &= 1 + f'_+(0)x = 1 \end{aligned}$$

Esercizio 315

Verificare che il punto $(0, 0)$ è un punto angoloso per il diagramma della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Soluzione

Calcoliamo le derivate destra e sinistra nel punto $x = 0$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Quindi $(0, 0)$ è un punto angoloso. Le equazioni delle rette tangenti a sinistra e a destra sono:

$$\begin{aligned} \tau_-) \quad y - f(0) &= f'_-(0)(x - 0) = -\frac{\pi}{2}x \\ \tau_+) \quad y - f(0) &= f'_+(0)(x - 0) = \frac{\pi}{2}x \end{aligned}$$

Esercizio 316

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = (x+1)(2x+1)(3x+1)$

2. $g(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$

Soluzione

1. $\ln f(x) = \ln(x+1) + \ln(2x+1) + \ln(3x+1)$

$$\implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1}$$

$$\implies f'(x) = (2x+1)(3x+1) + 2(x+1)(3x+1) + 3(x+1)(2x+1)$$

2. $\ln g(x) = \ln(x+2)^2 - \ln[(x+1)^3(x+3)^4]$

$$\implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+3} = \frac{2(x+1)(x+3) - 3(x+2)(x+3) - 4(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x+3)}$$

$$= -\frac{5x^2+19x+20}{(x+2)(x+1)(x+3)} \implies g'(x) = -\frac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$$

Esercizio 317

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$

2. $f(x) = x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$

3. $f(x) = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$

4. $f(x) = x^x$

Soluzione

1. $\ln f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x(x-1)}{x-2} = \frac{1}{2} [\ln(x^2-x) - \ln(x-2)]$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1}{x^2-x} - \frac{1}{x-2} \right) = \frac{1}{2} \frac{(2x-1)(x-2) - x^2 + x}{(x-2)(x^2-x)}$$

$$\implies f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2-x}{x-2}} \frac{x^2-4x+2}{(x-2)(x^2-x)} = \frac{x^2-4x+4}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$$

$$\begin{aligned}
2. \ln f(x) &= \ln x + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right) = \ln x + \frac{2}{3} \ln x - \frac{1}{3} \ln(x^2+1) \\
\implies \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{x} + \frac{2}{3x} - \frac{2x}{3(x^2+1)} = \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} \\
\implies f'(x) &= \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \ln f(x) &= 9 \ln(x-2) - \frac{1}{2} \ln [(x-1)^5 (x-3)^{11}] \\
&= 9 \ln(x-2) - \frac{1}{2} [5 \ln(x-1) + 11 \ln(x-3)] \\
&= 9 \ln(x-2) - \frac{5}{2} \ln(x-1) - \frac{11}{2} \ln(x-3) \\
\implies \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{9}{x-2} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{11}{2(x-3)} \\
&= \frac{18(x-1)(x-3) - 5(x-2)(x-3) - 11(x-1)(x-2)}{2(x-1)(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{x^2-7x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
\implies f'(x) &= \frac{(x^2-7x+1)(x-2)^8}{(x-1)(x-3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}
\end{aligned}$$

Esercizio 318

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
\ln f(x) &= \ln \sqrt{x-1} - \ln \left[\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3} \right] \\
&= \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{2}{3} \ln(x+2) - \frac{3}{2} \ln(x+3) \\
\implies \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} \\
&= -\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)(x+2)(x+3)}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = -\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)(x+2)(x+3)} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$$

Esercizio 319

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^{x^2}$$
$$g(x) = \sqrt[x]{x}$$

Soluzione

$$\ln f(x) = \ln x^{x^2} = x^2 \ln x \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \ln x + x$$

Quindi:

$$f'(x) = x^{x^2+1} (2 \ln x + 1)$$

Per la funzione $g(x)$:

$$\ln g(x) = \ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x} \implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Quindi:

$$g'(x) = x^{1/x} \frac{1 - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) = \sqrt[x]{x^{1-2x}} (1 - \ln x)$$

Equivalentemente:

$$g'(x) = \sqrt[x]{x} \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Esercizio 320

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

Soluzione

$$\ln f(x) = \sqrt{x} \ln x \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$$

Quindi:

$$f'(x) = x^{\sqrt{x}} \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} \frac{\ln x + 2}{2}$$

Esercizio 321

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = x^{x^x}$$

Soluzione

$$\ln f(x) = x^x \ln x \quad (1)$$

Derivando ambo i membri:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left[\frac{d}{dx} (x^x) \right] \ln x + x^{x-1} \quad (2)$$

Calcoliamo la derivata di $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^x$:

$$\ln g(x) = x \ln x \implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + 1 \implies \frac{d}{dx} (x^x) = x^x (\ln x + 1),$$

che sostituita nella (2) porge:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= x^x \ln x (\ln x + 1) + x^{x-1} \\ &= x^x \left[\ln x (\ln x + 1) + \frac{1}{x} \right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^{x^x} \cdot x^{x-1} [x \ln x (\ln x + 1) + 1] \\ &= x^{x^x} \cdot x^{x-1} (x \ln^2 x + x \ln x + 1) \end{aligned} \quad (3)$$

Esercizio 322

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = x^{\sin x}$$

Soluzione

$$\ln f(x) = \sin x \ln x \quad (4)$$

Derivando ambo i membri:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \quad (5)$$

Quindi:

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) \quad (6)$$

Esercizio 323

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = (\cos x)^{\sin x}$$

Soluzione

$$\ln f(x) = \sin x \ln \cos x \quad (7)$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \cos x \ln \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (-\sin x) \\ &= \cos x \ln \cos x - \tan x \sin x \end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = (\cos x)^{\sin x} (\cos x \ln \cos x - \tan x \sin x) \quad (8)$$

Esercizio 324

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Soluzione

$$\ln f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (9)$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] \quad (10)$$

Esercizio 325

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = (\arctan x)^x$$

Soluzione

$$\ln f(x) = x \ln (\arctan x) \quad (11)$$

Derivando ambo i membri:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln (\arctan x) + \frac{x}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Quindi:

$$f'(x) = (\arctan x)^x \left[\ln (\arctan x) + \frac{x}{(1+x^2) \arctan x} \right] \quad (12)$$