Esercizio 22

Assegnata l'equazione differenziale del quart'ordine

$$y^{IV} + 4y = 0, \tag{1}$$

si verifichi che $y = e^{-x} \cos x$ è un integrale particolare.

***

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned}
y' &= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = y - e^{-x} \sin x \\
y'' &= -y' + e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x = -y' - y + e^{-x} \sin x \\
y''' &= -y'' - y' - e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \\
&= -y'' - y' + y - e^{-x} \sin x \\
y^{IV} &= -y''' - y'' + y' + e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x \\
&- y''' - y'' + y' - y + e^{-x} \sin x
\end{aligned}$$

Il primo membro della (1) si scrive:

$$\begin{aligned}
y^{IV} + 4y &= -y''' - y'' + y' - y + e^{-x} \sin x + 4y \\
&= 2y' + 2y + 2e^{-x} \sin x \\
&= -2y + 2e^{-x} \sin x + 2y + 2e^{-x} \sin x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Esercizio 24

Assegnata la funzione

$$f(x) = e^x \sin x,$$

determinare $f^{(k)}(0)$, per $k = 0, ..., 3$.

***

$f^{(0)}(0) = f(0) = 0$
$f'(x) = \frac{d}{dx} e^x \sin x = e^x (\cos x + \sin x) = f(x) + e^x \cos x \Longrightarrow f'(0) = 1$
$f''(x) = f'(x) - f(x) + e^x \cos x \Longrightarrow f''(0) = 2$
$f'''(x) = f''(x) - f'(x) - f(x) + e^x \cos x \Longrightarrow f'''(0) = 2$