Esercizio 13

Determinare la derivata seconda delle funzioni:

1. $f(x) = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$
2. $f(x) = e^{x^2}$
3. $f(x) = \sin^2 x$
4. $f(x) = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$
5. $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$
6. $f(x) = (1 + x^2) \arctan x$
7. $f(x) = a \cosh \left(\frac{x}{a}\right)$

Soluzione

1. $f'(x) = 8x^7 + 42x^5 - 5 \Longrightarrow f''(x) = \frac{d}{dx}(8x^7 + 42x^5 - 5) = 56x^6 + 210x^4$
2. $f'(x) = \frac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$; $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(2xe^{x^2}\right) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$
3. $f'(x) = \frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\cos x \sin x = \sin 2x,\ f''(x) = \frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$
4. $f'(x) = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\ln(1 + x^2) = \frac{2}{3}\frac{x}{x^2+1} \Longrightarrow f''(x) = \frac{2}{3}\frac{d}{dx}\frac{x}{x^2+1} = -\frac{2}{3}\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$
5. $f'(x) = \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \Longrightarrow f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
6. $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[(1 + x^2)\arctan x\right] = 2x\arctan x + 1 \Longrightarrow f''(x) = \frac{d}{dx}(1 + x^2)\arctan x = 2\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right)$
7. $f'(x) = \frac{d}{dx}a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \Longrightarrow f''(x) = \frac{d}{dx}\sinh\frac{1}{a}x = \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

Esercizio 14

Assegnata l'equazione differenziale:

$$1 + y'^2 = 2yy'', \tag{1}$$

si verifichi che una soluzione è $y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)$.

***

Determiniamo la derivata prima e seconda di y

$$y' = x + 1$$
$$y'' = 1$$

Sostituendo nel primo membro della (1):

$$1 + (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 2 \Longleftrightarrow 1 + y'^2 = 2yy''$$

Esercizio 15

Assegnata l'equazione differenziale:

$$1 + y'^2 = 2yy'', \tag{2}$$

si verifichi che una soluzione è $y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)$.

***

Determiniamo la derivata prima e seconda di y

$$\begin{aligned} y' &= x + 1 \\ y'' &= 1 \end{aligned}$$

Sostituendo nel primo membro della (2):

$$1 + (x+1)^2 = x^2 + 2x + 2 \Longleftrightarrow 1 + y'^2 = 2yy''$$

Esercizio 16

Assegnata l'equazione differenziale:

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \tag{3}$$

si verifichi che la soluzione generale[1] è $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

***

Determiniamo la derivata prima e seconda di $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

$$\begin{aligned} y' &= -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} \\ y'' &= C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{-2x} \end{aligned}$$

Il primo membro della (3) si scrive:

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{-2x} - 3C_1 e^{-x} - 6C_2 e^{-2x} + 2C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{-2x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

[1] Nella teoria delle equazioni differenziali, tale soluzione è denominata *integrale generale.*

Esercizio 17

Assegnata l'equazione differenziale:

$$y'' - 4y' + 29y = 0, \tag{4}$$

si verifichi che una soluzione[2] è $y = e^{2x} \sin 5x$.

***

Determiniamo la derivata prima e seconda di $y = e^{2x} \sin 5x$

$$\begin{aligned} y' &= e^{2x} \sin 5x + 5e^{2x} \cos 5x = 2y + 5e^{2x} \cos 5x \\ y'' &= 2y' + 10e^{2x} \cos 5x - 25y \end{aligned}$$

Il primo membro della (4) si scrive:

$$\begin{aligned} & 2y' + 10e^{2x} \cos 5x - 25y - 4y' + 29y \\ & = -2y' + 4y + 10e^{2x} \cos 5x \\ & = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 18

Determinare la derivata del terzo ordine della funzione

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 21x - 4$$

***

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 5x^2 + 21x - 4\right) = 3x^2 - 10x + 21$
$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 10x + 21\right) = 6x - 10$
$f'''(x) = 6$

Esercizio 19

Assegnata la funzione

$$f(x) = (2x - 3)^5,$$

determinare $f'''(3)$

***

$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x - 3)^5 = 10(2x - 3)^4$
$f''(x) = 10\frac{d}{dx}(2x - 3)^4 = 80(2x - 3)^3$
$f'''(x) = 80\frac{d}{dx}(2x - 3)^3 = 480(2x - 3)^2 \Longrightarrow f'''(3) = 4320$

[2]Nella teoria delle equazioni differenziali, tale soluzione è denominata *integrale particolare.*

Esercizio 20

Assegnata la funzione

$$f(x) = \ln(1+x),$$

determinare $f^{V}(x)$.

***

$f'(x) = \frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{x+1}$
$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{(x+1)^2}$
$f'''(x) = -\frac{d}{dx}\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^3}$
$f^{IV}(x) = \frac{d}{dx}\frac{2}{(x+1)^3} = -\frac{6}{(x+1)^4}$
$f^{V}(x) = -\frac{d}{dx}\frac{6}{(x+1)^4} = \frac{24}{(x+1)^5}$

Esercizio 21

Determinare la derivata sesta della funzione:

$$f(x) = \sin 2x,$$

***

$f'(x) = \frac{d}{dx}\sin 2x = 2\cos 2x$
$f''(x) = 2\frac{d}{dx}\cos 2x = -4\sin 2x$
$f'''(x) = -4\frac{d}{dx}\sin 2x = -8\cos 2x$
$f^{IV}(x) = -8\frac{d}{dx}\cos 2x = 16\sin 2x$
$f^{V}(x) = 16\frac{d}{dx}\sin 2x = 32\cos 2x$
$f^{VI}(x) = 32\frac{d}{dx}\cos 2x = -64\sin 2x$