Esercizio 346

[file scaricato da http://www.extrabyte.info]

Assegnata la curva $y = 2^x$, determinare in un punto qualunque $P(x, f(x))$, la lunghezza t della tangente, della sottotangente (S_t), della normale (n) e della sottonormale (S_n)

***

Soluzione
Poniamo:

$$f(x) \stackrel{def}{=} 2^x$$

Quindi:

$$f'(x) = 2^x \ln 2$$

La lunghezza della tangente è data da:

$$\begin{aligned} t &= \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \sqrt{1 + f'(x)^2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 2^{2x} \ln^2 2}}{\ln 2} \end{aligned} \tag{1}$$

La lunghezza della sottotangente è data da:

$$\begin{aligned} S_t &= \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \\ &= \frac{1}{\ln 2} \end{aligned} \tag{2}$$

La lunghezza della normale è data da:

$$\begin{aligned} n &= |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} \\ &= 2^x \sqrt{1 + 2^{2x} \ln^2 2} \end{aligned} \tag{3}$$

La lunghezza della sottonormale è data da:

$$\begin{aligned} S_n &= |f(x) f'(x)| \\ &= 2^{2x} \ln 2 \end{aligned} \tag{4}$$

Esercizio 347

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$xy = \arctan \frac{x}{y}, \tag{5}$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

***

Soluzione
Derivando primo e secondo membro della (5) rispetto a x:

$$\begin{aligned} y + xy' &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} \\ &= \frac{y - xy'}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Riordinando i vari termini:

$$y'x\left(1 + x^2 + y^2\right) = y\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

cioè:

$$y' = \frac{y\left(1 - x^2 - y^2\right)}{x\left(1 + x^2 + y^2\right)}$$

Esercizio 348

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$x^y = y^x, \tag{6}$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

***

Soluzione
Prendiamo il logaritmo di primo e secondo membro di (6):

$$y \ln x = x \ln y$$

Deriviamo primo e secondo membro:

$$y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} y'$$

Riordinando i vari termini, e risolvendo rispetto a y':

$$y' = \frac{x \ln y - y}{y \ln x - x} \cdot \frac{y}{x}$$

Esercizio 349

Assegnata la curva $y = x^2$, determinare:

1. L'equazione della tangente e della normale in $P_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, essendo $x_0 = 3$.
2. La lunghezza t della tangente, della sottotangente (S_t), della normale (n) e della sottonormale (S_n)

***

Soluzione
Poniamo:

$$f\left(x\right) \stackrel{def}{=} x^2$$

Quindi:

$$f\left(3\right) = 9,\ f'\left(3\right) = 6$$

L'equazione della retta tangente in P_0 è:

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

Cioè:

$$y = 6x - 9 \tag{7}$$

L'equazione della normale nel medesimo punto:

$$y - f\left(x_0\right) = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right)$$

Cioè:

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{19}{2} \tag{8}$$

La lunghezza della tangente è data da:

$$\begin{aligned} t &= \left|\frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}\right|\sqrt{1 + f'\left(x_0\right)^2} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{37} \end{aligned} \tag{9}$$

La lunghezza della sottotangente è data da:

$$\begin{aligned} S_t &= \left|\frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}\right| \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

La lunghezza della normale è data da:

$$\begin{aligned} n &= |f(x_0)| \sqrt{1 + f'(x_0)^2} \\ &= 9\sqrt{37} \end{aligned} \tag{11}$$

La lunghezza della sottonormale è data da:

$$\begin{aligned} S_n &= |f(x_0) f'(x_0)| \\ &= 54 \end{aligned} \tag{12}$$

Esercizio 350

Mostrare che la lunghezza della normale all'iperbole equilatera:

$$x^2 - y^2 = a^2, \tag{13}$$

è uguale in un qualunque punto $P(x, y)$ al raggio vettore di P: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

***

Soluzione
Osserviamo che la funzione $y(x)$ è implicitamente definita attraverso la (13). Quindi deriviamo primo e secondo membro rispetto a x:

$$x - yy' = 0,$$

cioè:

$$y' = \frac{x}{y} \tag{14}$$

La lunghezza della normale è:

$$n = |y| \sqrt{1 + y'^2}$$

Per la (14):

$$n = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Esercizio 351

Mostrare che la lunghezza della sottonormale all'iperbole equilatera:

$$x^2 - y^2 = a^2, \tag{15}$$

è uguale in un qualunque punto $P(x, y)$ a $|x|$.

***

Soluzione
Osserviamo che la funzione $y(x)$ è implicitamente definita attraverso la (15). Quindi deriviamo primo e secondo membro rispetto a x:

$$x - yy' = 0,$$

cioè:

$$y' = \frac{x}{y} \tag{16}$$

La lunghezza della normale è:

$$S_n = |yy'|$$

Per la (16):

$$S_n = |x|$$

Esercizio 352

Dimostrare che il segmento della tangente all'iperbole

$$xy = a^2, \tag{17}$$

compreso tra gli assi delle coordinate, è diviso a metà dal punto di tangenza.

***

Soluzione
Sia $P_0(x_0, y_0) \in \gamma)$ $y = \frac{a^2}{x}$, da cui $y_0 = \frac{a^2}{x_0}$. Poniamo:

$$f(x) = \frac{a^2}{x}$$

Quindi:

$$f'(x_0) = -\frac{a^2}{x_0^2}$$

L'equazione della tangente a γ in P_0 è:

$$y = -\frac{a^2}{x^2}x + \frac{2a}{x_0} \tag{18}$$

Indicati con M e N i punti di intersezione di γ con gli assi coordinati (fig. 1), dobbiamo dimostrare che P_0 è il punto medio del segmento $\overline{MN}$.
A tale scopo calcoliamo le coordinate di tali punti. Nella (18) poniamo:

$$x = 0 \Longrightarrow y = \frac{2a^2}{x_0}\Bigg) \Longrightarrow M\left(0, \frac{2a^2}{x_0}\right)$$
$$y = 0 \Longrightarrow x = 2x_0) \Longrightarrow N(2x_0, 0)$$

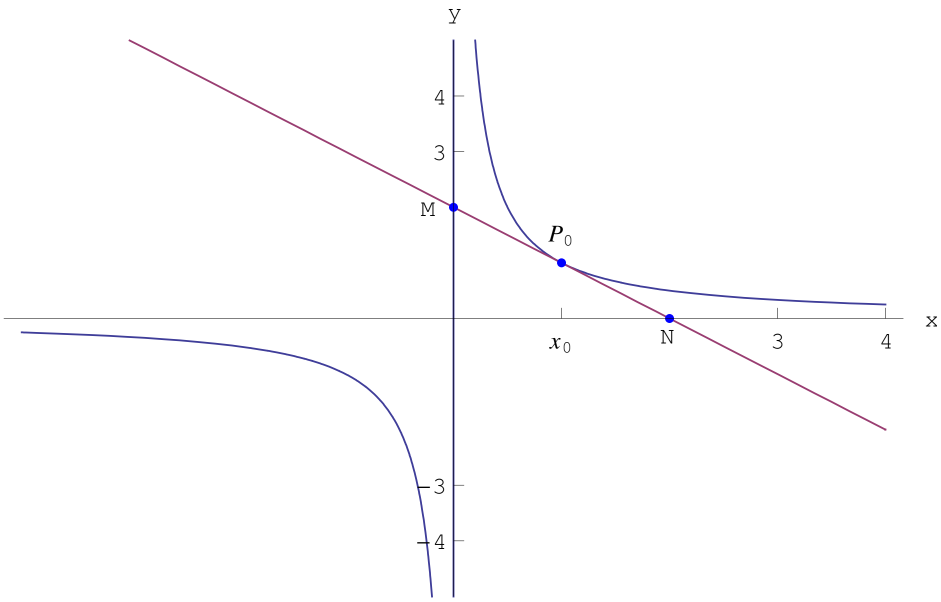

Figure 1: Retta tangente a γ) $xy = a^2$.

Quindi il punto medio ha coordinate:

$$\bar{x} = \frac{0 + 2x_0}{2} = x_0$$
$$\bar{y} = \frac{\frac{2a^2}{x_0} + 0}{2} = \frac{a^2}{x_0} = y_0$$

Cioè $P_0 \left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ è il punto medio del segmento $\overline{MN}$.

Esercizio 353

Dimostrare che per l'asteroide:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \tag{19}$$

il segmento della tangente, compreso tra gli assi coordinati, ha una lunghezza pari a a.

***

Soluzione
Deriviamo rispetto a x primo e secondo membro della (19):

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \Longrightarrow y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

Sia $P_0 \left(x_0, y_0\right) \in \gamma)$ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, quindi:

$$y_0^{2/3} = a^{2/3} - x_0^{2/3}$$

Senza perdita di generalità, supponiamo che sia $y_0 > 0$:

$$y_0 = \left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{3/2}$$

La derivata nel punto x_0:

$$y_0' = -\frac{\left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{1/2}}{x_0^{1/3}}$$

Possiamo ora scrivere l'equazione della tangente a γ in P_0:

$$y = -\frac{x}{x_0^{1/3}}\left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{1/2} + a^{2/3}\left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{1/2} \tag{20}$$

Indicati con M e N i punti di intersezione di γ con gli assi coordinati dobbiamo dimostrare che $\overline{MN} = a$.
A tale scopo calcoliamo le coordinate di tali punti. Nella (20) poniamo:

$$x=0 \Longrightarrow y=a^{2/3}\left(a^{2/3}-x_0^{2/3}\right)^{1/2}\Big) \Longrightarrow M\left(0,a^{2/3}\left(a^{2/3}-x_0^{2/3}\right)^{1/2}\right)$$
$$y=0 \Longrightarrow x=a^{2/3}x_0^{1/3}\Big) \Longrightarrow N\left(a^{2/3}x_0^{1/3},0\right)$$

Quindi

$$\begin{aligned}\overline{MN} &= \sqrt{\left[0-a^{2/3}x_0^{1/3}\right]^2-\left[\left(a^{2/3}-x_0^{2/3}\right)^{1/2}-0\right]^2} \\ &= a\end{aligned}$$

Esercizio 354

Scrivere le equazioni della tangente e della normale alla curva

$$x^3+y^2+2x-6=0, \tag{21}$$

nel punto di ordinata $y=3$.

***

Soluzione
Deriviamo rispetto a x primo e secondo membro della (21):

$$3x^2+2yy'+2=0 \Longrightarrow y'=-\frac{3x^2+2}{2y}$$

Per $y=3$ la (21) diventa:

$$x^3+2x+3=0 \Longleftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+3\right)=0 \underset{x\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} x=-1$$

Quindi:

$$y'(-1)=-\frac{5}{6}$$

Da ciò possiamo scrivere l'equazione della tangente:

$$\tau)\ \ y=-\frac{5}{6}x+\frac{13}{6} \Longleftrightarrow 5x+6y-13=0$$

L'equazione della normale:

$$\nu)\ \ y-3=\frac{6}{5}(x+1) \Longleftrightarrow 6x-5y+21=0$$

Esercizio 355

Dimostrare che le normali all'evolvente del cerchio:

$$\begin{cases} x(t) = a(\cos t + t\sin t) \\ y(t) = a(\sin t - t\cos t) \end{cases} \tag{22}$$

sono tangenti al cerchio $x^2 + y^2 = a^2$.

***

Soluzione

Determiniamo la derivata $\frac{dy}{dx}$ della funzione $y(x)$ implicitamente definita dalle (22). A tale scopo calcoliamo:

$$\frac{dx}{dt} = at\cos t$$
$$\frac{dy}{dt} = at\sin t,$$

donde:

$$\frac{dy}{dx} = \tan t$$

L'equazione della normale alla curva (22) nel punto di coordinate $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ è:

$$n_0)\ y - y(t_0) = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{t=t_0}[x - x(t_0)]$$

Cioè:

$$y = a(\sin t_0 - t_0\cos t) - \cot t_0 (x - a\cos t_0 - at_0\sin t_0)$$

Semplificando:

$$n_0)\ y = -x\cot t_0 + a(\sin t_0 + \cot t_0 \cos t_0) \tag{23}$$

Determiniamo ora l'equazione della tangente alla curva:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

A tale scopo esprimiamo quest'ultima in forma parametrica:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\sin t \end{cases} \tag{24}$$

Quindi:

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t \tag{25}$$
$$\frac{dy}{dt} = a\sin t$$

Cioè:

$$\frac{dy}{dx} = -\cot t \tag{26}$$

Pertanto l'equazione della tangente alla curva (24) nel punto di coordinate $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ è:

$$\tau_0)\ y - y(t_0) = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=t_0} [x - x(t_0)]$$

con le varie grandezze date dalle (24)-(25)-(26). Quindi:

$$\tau_0)\ y \ = -x \cot t_0 + a(\sin t_0 + \cot t_0 \cos t_0) \tag{27}$$

Cioè

$$\forall t_0 \in \mathbb{R},\, n_0 \equiv \tau_0$$

donde l'asserto.
La curva di equazioni parametriche (22) è riportata in fig. (2).

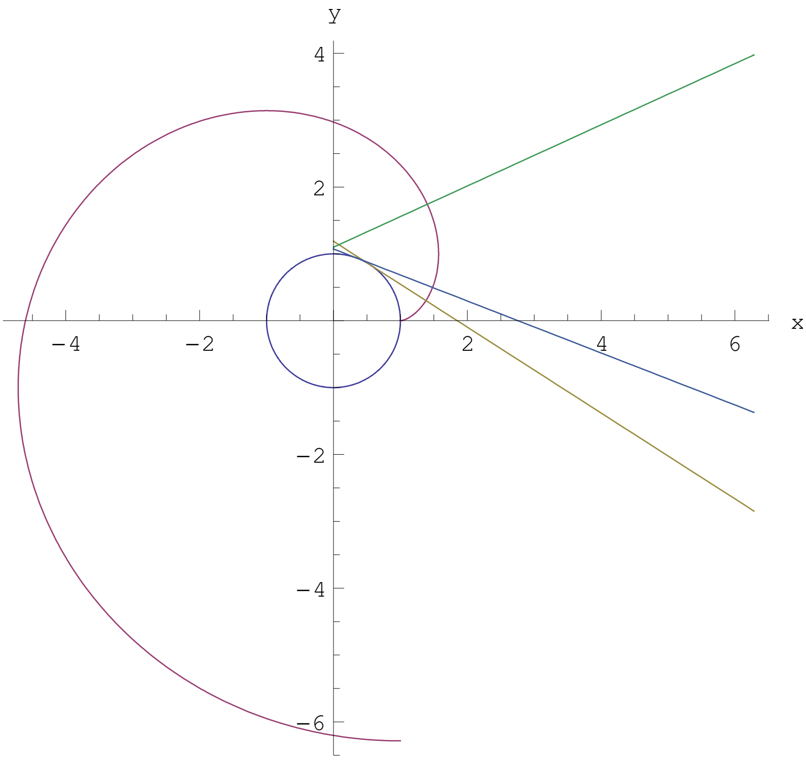

Figure 2: Curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x(t) = a(\cos t + t \sin t) \\ y(t) = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$

Esercizio 359

Un punto si muove sull'iperbole

$$y = \frac{10}{x} \tag{28}$$

con una velocità tale che la sua ascissa cresce uniformemente alla velocità di una unità per secondo. Determinare la velocità di variazione della sua ordinata quando il punto transita per $P_1\,(5,2)$.

Soluzione

È conveniente passare ad una rappresentazione parametrica della (28), assumendo come parametro il tempo t. A tale scopo osserviamo che $x\,(t) = vt$, essendo v la velocità con cui l'ascissa x varia nel tempo. Per ipotesi è $v = 1\text{unità}/\,\text{s}$, per cui scriviamo:

$$\begin{cases} x\,(t) = t \\ y\,(t) = \frac{10}{t} \end{cases} \tag{29}$$

La derivata di $y\,(t)$ è:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{10}{t^2} \tag{30}$$

Determiniamo a quale istante il punto transita per $P_1\,(5,2)$. Deve essere $x\,(t_1) = 5 \Longrightarrow t_1 = 5\,\text{s}$. Dalla (30) possiamo determinare la velocità con cui varia y quando il punto passa per P_1:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_1} = -\frac{2}{5}$$