Esercizi sulla formula per la derivazione della composizione di campi vettoriali

Richiami di teoria. Siano n, $m \in \mathbb{N}$, n, $m \geq 1$, e sia

$$\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{un campo vettoriale}$$

(con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto), quindi

$$\overrightarrow{F}(x) = F_1(x)\overrightarrow{i}_1 + \ldots + F_m(x)\overrightarrow{i}_m = (F_1(x), \ldots, F_m(x)) \quad \forall\, x \in A \subset \mathbb{R}^n,$$

e chiamiamo *funzioni componenti* i campi scalari $F_k : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $k = 1, \ldots, m$.

Ricordiamo che $\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x_0 \in A$ se e solo se per ogni $k = 1, \ldots, m$ le funzioni F_k sono differenziabili (nel senso dei campi scalari) in x_0. Allora sono ben definiti i vettori gradienti

$$\nabla F_k(x_0) = \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_0) \right) \quad \text{per ogni } k = 1, \ldots, m.$$

La matrice $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ di m righe e n colonne

$$\mathrm{D}_{\overrightarrow{F}}(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla F_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

si chiama **matrice jacobiana** di $\overrightarrow{F}$ in x_0 e contiene **tutte** le "informazioni differenziali" su $\overrightarrow{F}$ in x_0.

Derivazione della funzione composta. Siano p, n, $m \geq 1$ e siano dati

$$\overrightarrow{G} : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \qquad A \subset \mathbb{R}^p \text{ aperto}, \quad \overrightarrow{F} : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad B \subset \mathbb{R}^n \text{ aperto},$$

tali che $\mathrm{im}(\overrightarrow{G}) \subset B$. Quindi è definito il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{G} : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m.$$

Sia $x_0 \in A$ e supponiamo che

- $\overrightarrow{G}$ sia differenziabile in $x_0 \;\Rightarrow\; \mathrm{D}_{\overrightarrow{G}}(x_0)$
- $\overrightarrow{F}$ sia differenziabile in $\overrightarrow{G}(x_0) \;\Rightarrow\; \mathrm{D}_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{G}(x_0))$.

Allora, $\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{G}$ è differenziabile in x_0 e

$$\mathrm{D}_{\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{G}}(x_0) = \mathrm{D}_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{G}(x_0)) \cdot \mathrm{D}_{\overrightarrow{G}}(x_0) \quad \text{ove } \cdot \text{ prodotto di matrici.}$$

Osservazioni:

- è la generalizzazione della formula per la derivazione della composizione di funzioni di variabile reale, a valori in $\mathbb{R}$:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

- il prodotto matriciale è ben definito perché

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_{\overrightarrow{G}}(x_0) \ \text{ matrice } n \times p \\ &\mathrm{D}_{\overrightarrow{F}}(\overrightarrow{G}(x_0)) \ \text{ matrice } m \times n \end{aligned}$$

  quindi ricordando

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = m \times p$$

  otteniamo che

$$\mathrm{D}_{\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{G}}(x_0) \ \text{ matrice } m \times p$$

  come deve essere perché

$$\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{G} : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m.$$

- ora <u>abbandoniamo</u> la notazione $\overrightarrow{G}$, $\overrightarrow{F}$ per trattare in modo unificato campi scalari e vettoriali..

Esercizio 1. Date

$$\begin{aligned} G :&\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad G(x) := -x \overrightarrow{i}_1 + (x^2+1) \overrightarrow{i}_2 + \cos(x) \overrightarrow{i}_3 \\ F :& \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 y_2 + y_3^3 \end{aligned}$$

calcolare

$$\mathrm{D}_{F \circ G}(x) \quad \forall\, x \in \mathrm{dom}(F \circ G) = \mathbb{R}.$$

Svolgimento. Osserviamo che $\mathrm{D}_{F\circ G}(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché

- $G = (G_1, G_2, G_3)$ è differenziabile su $\mathbb{R}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{D}_G(x) = \begin{pmatrix} G_1'(x) \\ G_2'(x) \\ G_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2x \\ -\sin(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

- F è differenziabile su $\mathbb{R}^3$ e per ogni $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{D}_F(y_1, y_2, y_3) = \nabla F(y_1, y_2, y_3) = \left(2y_1y_2, y_1^2, 3y_3^2\right).$$

Siccome $F \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mi aspetto che $\mathrm{D}_{F\circ G}(x)$ sia matrice 1×1, cioè uno scalare (la derivata!). In effetti per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (F \circ G)'(x) = \mathrm{D}_{F\circ G}(x) &= \nabla F(G(x)) \cdot \mathrm{D}_G(x) \qquad (\cdot \text{ prodotto scalare}) \\ &= \left(2(-x)(x^2+1), (-x)^2, 3(\cos(x))^2\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2x \\ -\sin(x) \end{pmatrix} \\ &= 4x^3 + 2x - 3(\cos(x))^2 \sin(x). \end{aligned}$$

Esercizio 2. Date

$$\begin{aligned} G :&\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad G(x_1, x_2) := x_2 \overrightarrow{i}_1 + x_1 \overrightarrow{i}_2 + x_2 \overrightarrow{i}_3 \\ F :& \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad F(y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 \overrightarrow{i}_1 + y_3^2 \overrightarrow{i}_2 \end{aligned} \tag{1}$$

calcolare

$$\mathrm{D}_{F\circ G}(x_1, x_2) \quad \forall\, (x_1, x_2) \in \mathrm{dom}(F \circ G) = \mathbb{R}^2.$$

Svolgimento. Osserviamo che $\mathrm{D}_{F\circ G}(x_1,x_2)$ è ben definito per ogni $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ perché

- $G=(G_1,G_2,G_3)$ è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ e per ogni $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{D}_G(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\nabla G_1(x_1,x_2)\\ \nabla G_2(x_1,x_2)\\ \nabla G_3(x_1,x_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

- F è differenziabile su $\mathbb{R}^3$ e per ogni $(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{D}_F(y_1,y_2,y_3)=\begin{pmatrix}\nabla F_1(y_1,y_2,y_3)\\ \nabla F_2(y_1,y_2,y_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_2&y_1&0\\0&0&2y_3\end{pmatrix}$$

Siccome $F\circ G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, mi aspetto che $\mathrm{D}_{F\circ G}(x_1,x_2)$ sia una matrice 2×2. In effetti per ogni $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{D}_{F\circ G}(x_1,x_2)=\mathrm{D}_F(G(x_1,x_2))\cdot\mathrm{D}_G(x_1,x_2)\qquad(\cdot\text{ prodotto matriciale})$$

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2&0\\0&0&2x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2&x_1\\0&2x_2\end{pmatrix}$$

Esercizio assegnato. Date G e F come in (1), calcolare $\mathrm{D}_{G\circ F}(y_1,y_2,y_3)$ per ogni $(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ (si noti che sarà una matrice 3×3).
