Riduzione in frazioni semplici

file scaricato da www.extrabyte.info

Per calcolare l'integrale della funzione:

```
f[x_] := (x^4 + 8 x^3 - x^2 + 2 * x + 1) / ((x^2 + x) (x^3 + 1))
```

bisogna decomporre in frazioni semplici. *Mathematica* dispone del comando **`Apart[]`**

```
Apart[f[x]]
```

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{(1+x)^2}-\frac{2}{1+x}+\frac{2\,x}{1-x+x^2}$$

Per esplicitare i singoli passaggi che conducono a tale risultato, iniziamo a ridurre in fattori il denominatore della $f(x)$ utilizzando il comando **`Factor[]`**

```
Factor[(x^2 + x) (x^3 + 1)]
```

$$x\,(1+x)^2\,\left(1-x+x^2\right)$$

La riduzione in frazioni semplici è: $\frac{a}{x}+\frac{b_1}{x+1}+\frac{b_2}{(x+1)^2}+\frac{c\,x+d}{x^2-x+1}$. Quindi usiamo il comando **`Together[]`**

```
Together[a/x + b1/(x + 1) + b2/(x + 1)^2 + (c * x + d)/(x^2 - x + 1)]
```

$$\frac{a+a\,x+b1\,x+b2\,x+d\,x-b2\,x^2+c\,x^2+2\,d\,x^2+a\,x^3+b2\,x^3+2\,c\,x^3+d\,x^3+a\,x^4+b1\,x^4+c\,x^4}{x\,(1+x)^2\,\left(1-x+x^2\right)}$$

A noi interessa il numeratore di tale frazione. Per ragguppare tutti i termini con ugual potenza, utilizziamo il comando **`Collect[poli,var],`** dove **`poli`** è un qualunque polinomio, mentre **`var`** è la variabile rispetto alla quale vogliamo raggurppare i termini di ugual potenza.

```
num[x_] = Collect[
  a + a x + b1 x + b2 x + d x - b2 x^2 + c x^2 + 2 d x^2 + a x^3 + b2 x^3 + 2 c x^3 + d x^3 + a x^4 + b1 x^4 + c x^4, x]
```

$$a+(a+b1+b2+d)\,x+(-b2+c+2\,d)\,x^2+(a+b2+2\,c+d)\,x^3+(a+b1+c)\,x^4$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema di equazioni lineari:

$a+b_1+0+c+0=1$
$a+0+b_2+2\,c+d=8$
$0+0-b_2+c+2\,d=-1$
$a+b_1+b_2+0+d=2$
$a+0+0+0+0=1$

La matrice dei coefficienti è:

```
M = ( 1  1   0  1  0 )
    ( 1  0   1  2  1 )
    ( 0  0  -1  1  2 ) ;
    ( 1  1   1  0  1 )
    ( 1  0   0  0  0 )
```

Per risolvere il sistema di equazioni lineari utilizziamo il comando `LinearSolve[]` che accetta come argomenti la matrice dei coefficienti e il vettore riga i cui elementi sono i termini noti:

```
sol = LinearSolve[M, {1, 8, -1, 2, 1}]
```

```
{1, -2, 3, 2, 0}
```

Quindi $a = 1$, $b_1 = -2$, $b_2 = 3$, $c = 2$, $d = 0$. Pertanto la riduzione in frazioni semplici è :

$\frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2x}{x^2-x+1}$, in accordo con il risultato ottenuto con `Apart[]`