Complementi su integrali generalizzati e funzioni integrali

Integrali generalizzati

Dimostriamo il criterio del confronto per l'integrabilità al finito. (La dimostrazione sul libro di testo a p. 298 è un po' troppo sintetica).

Teorema 1 *Siano $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ continue, supponiamo che sia*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ per ogni } x \in (a, b], \text{ e}$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = +\infty.$$

Allora:

1) se l'integrale generalizzato $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge;

2) se l'integrale generalizzato $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, anche $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.

Dimostrazione. Proviamo la (1). Occorre mostrare che esiste finito

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Sia dunque

$$\phi(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

(definita per $0 < \varepsilon < b - a$). Poiché $f(x) \geq 0$, la funzione ϕ è monotona decrescente (se aumento ε rimpicciolisco l'intervallo $(a + \varepsilon, b)$ su cui poi calcolo l'integrale di una funzione positiva, e l'integrale diminuisce); perciò per il teorema di monotonia per le funzioni, certamente esiste (finito o $+\infty$), il $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \phi(\varepsilon)$. D'altro canto, poiché $f(x) \leq g(x)$, per la monotonia dell'integrale si ha

$$\phi(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \leq \int_{a+\varepsilon}^b g(x)\,dx,$$

e quest'ultimo integrale è limitato, al tendere a zero di ε, perché sappiamo per ipotesi che

$$\int_{a+\varepsilon}^b g(x)\,dx \to \int_a^b g(x)\,dx$$

(l'integrale generalizzato di g converge per ipotesi). Dunque ϕ è limitata, perciò il suo limite è finito, e la (1) è dimostrata.

Dalla dimostrazione si capisce anche che l'integrale generalizzato di una funzione positiva converge o diverge, ma non può oscillare. Perciò il punto (2) è logicamente equivalente al punto (1), e pertanto è dimostrato. ■

0.1 Funzioni integrali

Facciamo qualche osservazione sul problema di come si determina l'insieme di definizione di una funzione integrale, in particolare quando l'integranda è limitata (e quindi l'integrale va inteso in senso generalizzato).

L'insieme di definizione della funzione

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

è *il più grande intervallo I contenente x_0 e tale che per ogni $x \in I$ la funzione $f(t)$ sia integrabile (in senso proprio o generalizzato) sull'intervallo* $[a, b]$.

Alcuni esempi illustreranno quest'idea.

1.

$$F(x) = \int_{1}^{x} e^{t^2} dt.$$

La funzione integranda è continua in $\mathbb{R}$; quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ è integrabile in $[1, x]$; quindi $F(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$. (Il fatto che l'integranda non sia integrabile all'infinito non contraddice questo fatto, ma implica che $\lim_{x \to \pm\infty} F(x)$ sia infinito).

2.

$$F(x) = \int_{2}^{x} \arctan \frac{1}{t} dt.$$

L'integranda è limitata in tutto $\mathbb{R}$, continua tranne un punto di discontinuità a salto in 0, quindi integrabile (in senso ordinario, non generalizzato) in ogni intervallo $[2, x]$; quindi $F(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$.

3.

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{dt}{(t-3)\sqrt[3]{t-2}}.$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 2$, in cui è integrabile, e nell'intorno di $t = 3$, in cui non è integrabile. Affinché sia integrabile in tutto l'intervallo $[1, x]$, quindi, è necessario che sia $x < 3$. Perciò l'insieme di definizione di F è $(-\infty, 3)$.

4.

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{dt}{(t-2)\sqrt[3]{t-3}}.$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 3$, in cui è integrabile, e nell'intorno di $t = 2$, in cui non è integrabile. Affinché sia integrabile in tutto l'intervallo $[1, x]$, quindi, è necessario che sia $x < 2$. Perciò l'insieme di definizione di F è $(-\infty, 2)$. Si noti che anche se nell'intorno di 3 la funzione è integrabile, questo punto non può essere raggiunto, perché "appena x partendo da 1 arriva a 2 l'integrale diverge, e non ha più senso".

5.

$$F(x) = \int_{2}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t-2}}.$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 2$, in cui è integrabile. Perciò F è definita in tutto $\mathbb{R}$.

6.

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t-2}.$$

La funzione integranda è illimitata nell'intorno di $t = 2$, in cui è non è integrabile. Poiché $x_0 = 2$, per qualsiasi $x \in R$ la funzione non risulta integrabile in $[2, x]$, perciò l'insieme di definizione di F è vuoto (oppure possiamo dire che è ridotto al solo punto $x = 2$, in cui F vale 0).

7.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t}.$$

In questo caso $x_0 = -\infty$ e poiché in un intorno di $-\infty$ la funzione integranda non è integrabile, l'insieme di definizione di F è vuoto.

Si osservi, in particolare, che *l'insieme di definizione di una funzione integrale è necessariamente un intervallo.* Non può essere, ad esempio, un insieme del tipo $x \neq 0$ oppure $(0, 1) \cup (3, 5)$.