Esercizio 1193

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Dopo aver determinato l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y) = \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}, \tag{1}$$

calcolare il limite:

$$\lim_{\substack{x\to 0^+ \\ y\to 1^-}} f(x,y)$$

***

Soluzione
L'insieme di definizione è:

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < y \leq 1,\, y \neq -x+1\right\}$$

cioè il campo illimitato e non connesso $X = [0,+\infty) \times (-\infty, 1] - S$,
essendo $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y = -x+1\}$, cioè la retta di equazione $y = -x+1$. Da ciò segue che $P_0(0,1) \notin X$.

$$\begin{aligned}\lim_{P\to P_0} f(P) &= \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ y\to 1^-}} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}} \\ &= \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ y\to 1^-}} \left(\sqrt{x}+\sqrt{1-y}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Quindi P_0 è una discontinuità eliminabile. Prolungando per continuità:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}, \text{ se } (x,y) \in X - \{(0,1)\} \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

Esercizio 1194

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x,y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy} \tag{2}$$

***

Soluzione
Deve essere:

$$\begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right| \leq 1 \\ xy \geq 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è tale che:

$$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Quindi:

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2,\ xy \geq 0\right\}$$

Cioè:

$$X = ([-2, 0] \times (-\infty, 0]) \cup ([0, 2] \times [0, +\infty))$$

Esercizio 1195

Determinare l'insieme di definizione delle funzioni:

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{a - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - b}\right), \tag{3}$$

$$g(x, y) = \sqrt{6 - 2x - 3y} \tag{4}$$

essendo $a, b \in (0, +\infty)$, con $a > b$.

***

Soluzione
Deve essere:

$$\begin{cases} a - x^2 - y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 - b > 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid b < x^2 + y^2 < a\right\},$$

che è la corona circolare di centro l'origine e raggi $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$.
Per la funzione $g(x, y)$ deve essere

$$6 - 2x - 3y > 0,$$

cioè:

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y \leq 6\right\},$$

cioè l'insieme dei punti al di sotto della retta $2x + 3y - 6 = 0$.

Esercizio 1196

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnata la funzione di due variabili:

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}, \tag{5}$$

dimostrare i seguenti punti:

1. la funzione è pari;
2. la funzione è antisimmetrica rispetto alla permutazione delle variabili indipendenti;
3. la funzione è antisimmetrica rispetto alla sostituzione $(x,y) \to \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

***

Soluzione

1. L'insieme di definzione della funzione è $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\forall (x,y) \in X, \quad f(-x,-y) = \frac{x^2 - y^2}{xy} = f(x,y),$$

da cui la parità della funzione.

2.

$$\forall (x,y) \in X, \quad f(y,x) = \frac{y^2 - x^2}{2yx} = -f(x,y),$$

da cui l'antisimmetria rispetto alla permutazione delle variabili indipendenti.

3.

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in X, \quad f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) &= \frac{xy}{2} \cdot \frac{y^2 - x^2}{(xy)^2} \\ &= -f(x,y)\end{aligned}$$

Esercizio 1197

Assegnata la funzione di due variabili:

$$f(x,y) = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}, \tag{6}$$

determinare i valori assunti da f lungo la circonferenza del piano xy di centro l'origine e raggio R, discutendone l'andamento al variare di R.

***

Soluzione
L'espressione analitica della funzione può essere riscritta come:

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{1-(x^2+y^2)}$$

La funzione è definita in

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \neq 1\right\},$$

cioè è definita in tutto il piano xy, ad esclusione della circonferenza di centro l'origine e raggio 1.
La circonferenza Γ del piano xy di centro l'origine e raggio R ha equazione $x^2+y^2=R^2$, per cui:

$$\forall (x,y) \in \Gamma, \;\; f(x,y) = \frac{R^4}{1-R^2},$$

cioè la funzione assume un valore costante su Γ. Ora, se facciamo variare il raggio R, si ottiene la funzione:

$$f(R) = \frac{R^4}{1-R^2},$$

che è definita per $R \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Notiamo che per $R \to 1$ la funzione diverge:

$$\lim_{R\to 1^+} f(R) = -\infty, \quad \lim_{R\to 1^-} f(R) = +\infty$$

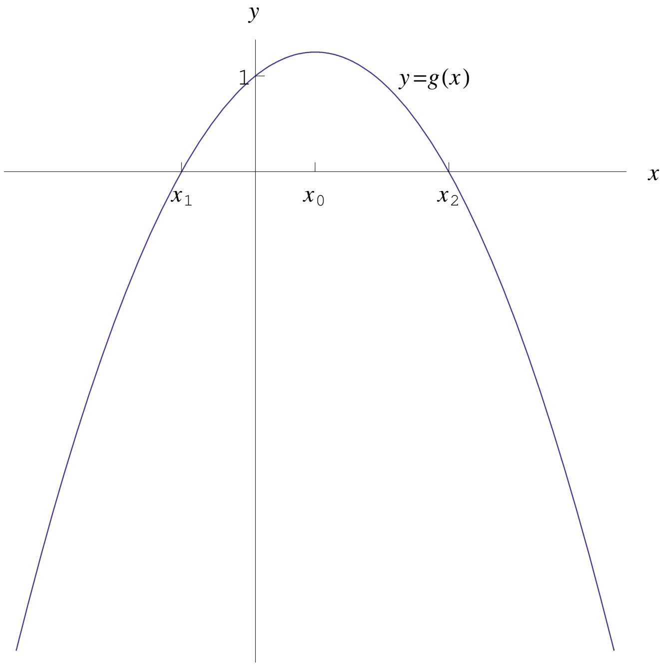

Figure 1: Grafico di $f(x,y) = \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}$

Esercizio 1198

Assegnata la funzione di due variabili:

$$f(x,y) = 1 + x - y, \tag{7}$$

studiare l'andamento di f lungo la parabola $y = x^2$

***

Soluzione

Per $y = x^2$ resta definita la funzione

$$g(x) \overset{def}{=} f\left(x, x^2\right) = 1 + x - x^2$$

il cui grafico è una parabola che volge la concavità verso il basso, ed interseca l'asse x nei punti $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, come riportato in figura 2

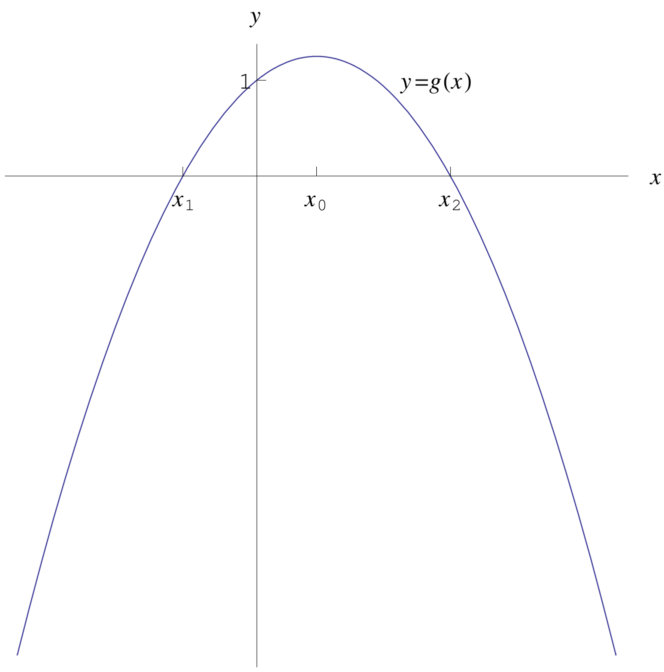

Figure 2: Grafico di $g(x) = f(x, x^2)$

Esercizio 1200

Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$f(x,y) = 1 + \sqrt{-(x-y)^2} \tag{8}$$

***

Soluzione
Deve essere:

$$-(x-y)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-y)^2 \leq 0 \Longleftrightarrow x-y=0 \Longleftrightarrow x=y$$

Quindi l'insieme di definizione (o campo di esistenza) della funzione è la retta $x-y=0$, ovvero la bisettrice del primo e terzo quadrante:

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y\right\}$$

Osserviamo inoltre che la funzione assegnata è una funzione costante, giacché:

$$\forall (x,y) \in X, \quad f(x,y) = 1$$

Esercizio 1201

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \tag{9}$$

***

Soluzione
Deve essere:

$$1-(x-y)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2+y^2 \leq 1$$

Quindi l'insieme di definizione (o campo di esistenza) della funzione è:

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

Esercizio 1202

Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$f(x,y) = \arccos x + \arccos y \tag{10}$$

***

Soluzione
Deve essere:

$$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,1] \\ y \in [-1,1] \end{cases}$$

Quindi l'insieme di definizione (o campo di esistenza) della funzione è il quadrato

$$X = [-1,1] \times [-1,1]$$

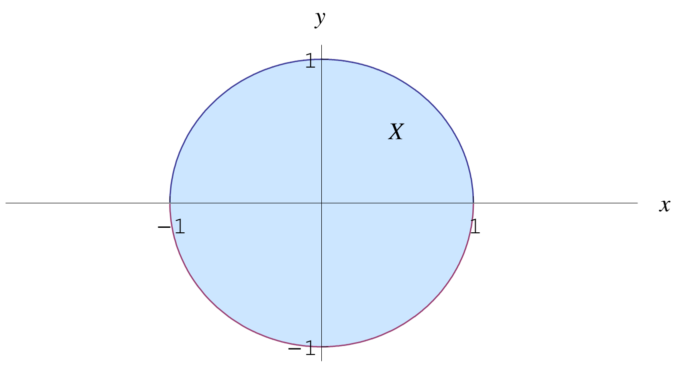

Figure 3: Campo di esistenza della funzione $f\,(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

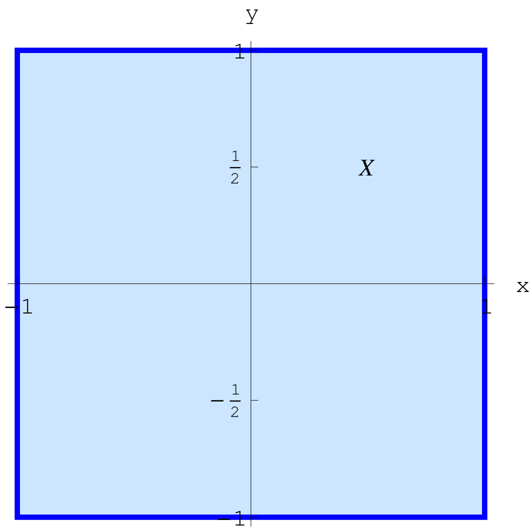

Figure 4: Campo di esistenza della funzione $f\,(x,y)=\arccos x+\arccos y$

Esercizio 1203

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$f(x,y) = \ln(x+y) \tag{11}$$

***

Soluzione
Deve essere:

$$x + y > 0 \Longleftrightarrow y > -x$$

Quindi l'insieme di definizione (o campo di esistenza) della funzione è il campo connesso (illimitato):

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \;\; y > -x\right\},$$

cioè il semipiano al di sopra della retta $y = -x$ (bisettrice del secondo e quarto quadrante).