Esercizio 146

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty}(1+a^x)^{1/x}$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to+\infty}(1+a^x)^{1/x}=\infty^0$$

Scriviamo:

$$\lim_{x\to+\infty}(1+a^x)^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(1+a^x)^{1/x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\ln(1+a^x)^{1/x}}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+a^x)^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+a^x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+a^x)}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{1+a^x}\\
&=\ln a\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{1+a^x}\\
&=\ln a\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^{-x}+1}=\ln a
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}(1+a^x)^{1/x}=e^{\ln a}=a$$

Esercizio 147

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{\tan x\sqrt{\sin x}}$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{\tan x\sqrt{\sin x}}=\frac{0}{0}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{\tan x\sqrt{\sin x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{\sin x}+\frac{\tan x}{2\sqrt{\sin x}}\cos x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{2\sqrt{\sin x}}}\right)$$
$$=\left(\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 x\,(1-\cos\sqrt{x})}{2\sin x+\sin x\cos^2 x}\right)$$

Calcoliamo a parte i due limiti:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 x\,(1-\cos\sqrt{x})}{2\sin x+\sin x\cos^2 x}$$
$$=\frac{0}{0}$$
$$=\left(\lim_{x\to 0^+}\cos^2 x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}}{2\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin x}{x}\cos^2 x}\right)$$
$$=1\cdot\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{6}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{\tan x\sqrt{\sin x}}=\frac{1}{6}$$

Esercizio 148

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{\sin x-x\cos x}$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{\sin x-x\cos x}=\frac{0}{0}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{\sin x - x\cos x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\sin x}$$
$$=\frac{0}{0}$$
$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x + x\cos x}$$
$$=\frac{0}{0}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2\cos x - x\sin x}=\frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{\sin x - x\cos x}=\frac{1}{2}$$

Esercizio 149

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}(x-\sin x)\ln x$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to 0}(x-\sin x)\ln x = 0\cdot\infty$$

Riconduciamo la forma indeterminata $0\cdot\infty$ alla $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}(x-\sin x)\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{(\ln x)^{-1}}=\frac{0}{0}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per x^3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\sin x}{x^3}}{\frac{1}{x^3\ln x}}$$

Calcoliamo a parte i due limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{H}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}x^3\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-3}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\sin x}{x^3}}{\frac{1}{x^3\ln x}}=\frac{\frac{1}{6}}{\infty}=0$$

Esercizio 150

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\infty^0$$

Scriviamo:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)},$$

per cui calcoliamo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\\
&=0\cdot\infty\\
&=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}\\
&=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\right)=0
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^0=1$$

Esercizio 151

Assegnati gli infinitesimi per $x\to 0^+$:

$$\begin{aligned}
&f(x)=\lambda^2\sqrt{x^3+2x^2}+(1-2\lambda)\sqrt{\sin x}\tan\sqrt{x}\\
&g(x)=x,
\end{aligned}$$

determinare i valori di $\lambda\in\mathbb{R}$ tali che f,g sono dello stesso ordine

***

Soluzione
Calcoliamo il limite del rapporto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\lambda^2\sqrt{x^3+x^2}+(1-2\lambda)\sqrt{\sin x}\tan\sqrt{x}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\left[\lambda^2\sqrt{x+1}+(1-2\lambda)\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]\\ &= \lambda^2-2\lambda+1\\ &= (\lambda-1)^2\end{aligned}$$

Abbiamo:

$$f,g \text{ dello stesso ordine } \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}-\{0\} \Longleftrightarrow (\lambda-1)^2\neq 0 \Longleftrightarrow \lambda\neq 1$$

Esercizio 154

Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}$$

***

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} = \frac{0}{0}$$

Osserviamo che il numeratore può essere scritto come:

$$\sqrt[4]{1-\cos x} = \sqrt[4]{\frac{1-\cos x}{x^2}}\cdot x^{1/2},$$

per cui dividendo numeratore e denominatore per $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1-\cos x}{x^2}}} = \frac{\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}}{\lim_{x\to 0^+}\sqrt[4]{\frac{1-\cos x}{x^2}}}$$

Calcoliamo a parte i due limiti:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt[4]{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \underset{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{2^t-1}{t} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0^+} 2^t\ln 2 = \ln 2$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} = \sqrt[4]{2}\ln 2$$

Esercizio 155

Calcolare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos 2x}}$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos 2x}} = 1^\infty$$

Scriviamo:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos 2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\ln\left(2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos 2x}}} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln\left(2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos 2x}}}$$

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln\left(2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos 2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(2\sin^2 x\right)}{\cos 2x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} -\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} = -1$$

Quindi:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos 2x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 156

Calcolare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\pi - 4x)\ln\left(1-\tan^2 x\right)$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\pi - 4x)\ln\left(1-\tan^2 x\right) = 0\cdot\infty,$$

che può essere ricondotta alla forma $\frac{\infty}{\infty}$:

Scriviamo:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(1-\tan^2 x\right)}{(\pi-4x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Appliciando la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(1-\tan^2 x\right)}{(\pi-4x)^{-1}} \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[\frac{(\pi-4x)^2\tan x}{1-\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\pi-4x)^2}{1-\tan^2 x}\right]\cdot\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x}\right] = -1$$

Calcoliamo a parte i due limiti:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x} = 2$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\pi-4x)^2}{1-\tan^2 x} &= \frac{0}{0} \overset{H}{=} 4\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\pi-4x)\cos^2 x}{\tan x}\\ &= 4\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\pi-4x)\cos^3 x}{\sin x}\\ &= 4\cdot\frac{0}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = 0\end{aligned}$$

Per cui il limite è nullo:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-4x)\ln\left(1-\tan^2 x\right) = 0$$

Esercizio 157

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1+\cos x-2\cos^2 x}$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1+\cos x-2\cos^2 x}\\ &= \frac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1+\cos x-2\cos^2 x}{x^2}}\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte il limite a denominatore:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x-2\cos^2 x}{x^2}\\
&=\frac{0}{0}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\cos x-\cos^2 x}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos x)}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}\cdot 2+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Per cui il limite proposto vale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1+\cos x-2\cos^2 x}=\frac{2}{3}$$

Esercizio 158

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$$

***

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}\\
&=\frac{0}{0}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x\cos x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}(1+\cos x+\cos^2 x)}{\frac{\sin x}{x}\cos x}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\cdot(1+1+1)}{1\cdot 1}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$