

Estremi relativi ed assoluti

(funzioni di più variabili)

<http://www.extrabyte.info>

Capitolo 1

Estremi relativi ed estremi assoluti

1.1 Estremi relativi

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (campo o dominio).

$$\left. \begin{array}{l} P_0 \in X \text{ è} \\ \text{un punto di massimo relativo} \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists I(P_0) \mid P \in X \cap I(P_0) \implies f(P) \leq f(P_0))$$

Il valore $f(P_0)$ assunto da f in P_0 si dice **un massimo relativo** di f .

$$\left. \begin{array}{l} P_0 \in X \text{ è} \\ \text{un punto di minimo relativo} \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists I(P_0) \mid P \in X \cap I(P_0) \implies f(P) \geq f(P_0))$$

Il valore $f(P_0)$ assunto da f in P_0 si dice **un minimo relativo** di f .

Se le disuguaglianze sono verificate in senso stretto, allora abbiamo un punto di massimo/minimo relativo proprio:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} P_0 \in X \text{ è} \\ \text{un punto di massimo relativo proprio} \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{\iff} \\ \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists I(P_0) \mid P \in X \cap I(P_0) - \{P_0\} \implies f(P) < f(P_0)) \\ \left. \begin{array}{l} P_0 \in X \text{ è} \\ \text{un punto di minimo relativo proprio} \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{\iff} \\ \stackrel{\text{def}}{\iff} (\exists I(P_0) \mid P \in X \cap I(P_0) - \{P_0\} \implies f(P) > f(P_0)) \end{array}$$

Se poi intorno a P_0 è $f(P) = f(P_0)$ allora si ha un punto di massimo relativo **improprio**. Precisamente:

$$\begin{aligned}
& \left(P_0 \in P \text{ è} \right. \\
& \quad \left. \text{un punto di massimo relativo improprio} \right) \stackrel{def}{\iff} \\
& \stackrel{def}{\iff} \left(P_0 \text{ è un punto di max relativo tale che} \right. \\
& \quad \left. \forall I(P_0), \exists P \in X \cap I(P_0) \mid f(P) = f(P_0) \right. \\
& \quad \left. P_0 \in P \text{ è} \right) \stackrel{def}{\iff} \\
& \stackrel{def}{\iff} \left(P_0 \text{ è un punto di min relativo tale che} \right. \\
& \quad \left. \forall I(P_0), \exists P \in X \cap I(P_0) \mid f(P) = f(P_0) \right)
\end{aligned}$$

Se f è dotata di massimo in X , questo si chiama **massimo assoluto** di f in P . Indichiamo con M il massimo assoluto di f . Il punto $P \mid f(P) = M$ si dice **punto di massimo assoluto** per f . Evidentemente:

P è punto di massimo assoluto per $f \implies (P \text{ è punto di massimo relativo per } f)$

Una definizione simile per il minimo di f in X . Più precisamente, se f è dotata di minimo m in X , questo si chiama **minimo assoluto di f** , e il punto $P' \mid f(P') = m$, si dice **punto di minimo assoluto** per f . Inoltre, un punto di minimo assoluto è necessariamente punto di minimo relativo, ma non viceversa. I punti di massimo e minimo relativo si dicono **punti di estremo relativo** o **punti estremanti relativi** della funzione. I massimi e minimi relativi si dicono invece **estremi relativi** o **estremanti relativi** della funzione. Una definizione analoga per i punti di massimo e minimo assoluti (**punti di estremo assoluto** ed **estremo assoluto**).

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 1. Sia f parzialmente derivabile in $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$\left(P_0 \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right) \in \overset{\circ}{X} \text{ è punto} \right. \\
\quad \left. \text{di estremo relativo per } f \right) \implies f_{x_k}(P_0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
P_0 \in \overset{\circ}{X} & \implies \exists I_\delta(P_0) = \left\{ P \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^{(0)})^2 \leq \delta^2 \right\} \subset X \\
& \implies \left\{ \left(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right) \mid x_1^{(0)} - \delta \leq x_1 \leq x_1^{(0)} + \delta \right\} \subset X
\end{aligned}$$

Da ciò segue che possiamo definire la funzione della sola variabile x_1 :

$$\begin{aligned}
\phi & : \left[x_1^{(0)} - \delta, x_1^{(0)} + \delta \right] \rightarrow \mathbb{R} \\
\phi(x_1) & = f \left(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right)
\end{aligned}$$

Evidentemente:

$$\left. \begin{array}{l} P_0 \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right) \in \overset{\circ}{X} \text{ è punto} \\ \text{di estremo relativo per } f \end{array} \right) \implies \left(x_1^{(0)} \text{ è punto di estremo relativo per } \phi \right) \\ \implies \phi' \left(x_1^{(0)} \right) = 0$$

Ma $\phi' \left(x_1^{(0)} \right) = f_{x_1} \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right) = 0$, per cui:

$$f_{x_1} \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right) = 0$$

Applicando lo stesso procedimento alle $x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, si perviene alle rimanenti relazioni che compongono la tesi del teorema. \square

Quindi l'annullarsi delle derivate parziali prime in P_0 è condizione necessaria affinché P_0 sia punto estremante:

$$\underbrace{f_{x_k} \left(P_0 \right) = 0}_{\text{condizione necessaria}} \iff (P_0 \text{ è punto estremante}) \quad (1.1)$$

Si osservi che tale condizione non è sufficiente:

$$f_{x_k} \left(P_0 \right) = 0 \not\Rightarrow (P_0 \text{ è punto estremante}) \quad (1.2)$$

In ogni caso sussiste la seguente definizione:

$$f_{x_k} \left(P_0 \right) = 0 \xrightarrow{\text{def}} (P_0 \text{ è punto estremo}) \quad (1.3)$$

Per quanto stabilito dal teorema precedente, le coordinate cartesiane dei punti estremali si identificano con le soluzioni del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f_{x_1} \left(x_1, x_2, \dots, x_n \right) = 0 \\ f_{x_2} \left(x_1, x_2, \dots, x_n \right) = 0 \\ \dots \\ f_{x_n} \left(x_1, x_2, \dots, x_n \right) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

I punti estremali sono detti anche **punti critici** o **punti stazionari**. Quest'ultima denominazione deriva dal fatto che - se la funzione è di classe C^1 - in essi si annulla la derivata direzionale, per ogni direzione \mathbf{n} . Osserviamo innanzitutto che in un punto stazionario si annulla il gradiente della funzione:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Quindi, se P_0 è un punto stazionario, si ha: $\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$, per cui:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{P_0} = \mathbf{n} \cdot \nabla f = 0, \quad \forall \mathbf{n}$$

Abbiamo visto che condizione necessaria affinché $P_0 \in X$ sia un punto estremante è che le sue coordinate siano soluzioni del sistema (1.4). Stabiliamo ora una condizione sufficiente. Invero, sussiste il

Teorema 2. Sia $f \in C^2(X)$; Se $P_0 \in \overset{\circ}{X}$ è punto estremo per f , considerata la forma quadratica

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n f_{x_h x_k}(P_0) \lambda_h \lambda_k, \quad (1.5)$$

nelle variabili ausiliarie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, risulta:

$$\begin{aligned} \phi \text{ è definita positiva [negativa]} &\implies \left(\begin{array}{l} P_0 \text{ è punto di minimo [massimo]} \\ \text{relativo proprio} \end{array} \right) \\ \phi \text{ è indefinita} &\implies P_0 \text{ non è punto estremante} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Omessa □

Nel caso particolare di una funzione di due variabili il teorema precedente si particolarizza in un criterio estremamente efficace. Per una funzione di due variabili, la forma quadratica (1.5) è:

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2) = f_{xx}(x_0, y_0) \lambda_1^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) \lambda_1 \lambda_2 + f_{yy}(x_0, y_0) \lambda_2^2,$$

dove $P_0(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{X}$.

Come è noto, nel caso di una forma quadratica in due variabili per stabilirne il segno, si studia il segno del discriminante:

$$H = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2,$$

che si chiama *hessiano* della funzione. Precisamente:

$\phi(\lambda_1, \lambda_2)$ è definita positiva/negativa

$$\iff H > 0 \implies f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0, \quad \begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \implies \phi \text{ è def. pos.} \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \implies \phi \text{ è def. neg.} \end{cases}$$

$\phi(\lambda_1, \lambda_2)$ è indefinita $\iff H < 0$

Tenendo conto del teorema precedente, si conclude:

$H > 0 \implies f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$, $\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \implies P_0 \text{ è punto di minimo relativo proprio} \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \implies P_0 \text{ è punto di massimo relativo proprio.} \end{cases}$
 $H < 0 \implies P_0$ non è punto estremante (**punto di sella**)

Nel caso in cui $H = 0$, il teorema non dice nulla sulla natura del punto P_0 , per cui bisogna studiare il segno della differenza $f(P) - f(P_0)$ in un intorno del punto P_0 .

Il teorema precedente può essere riformulato in termini della *matrice hessiana*. Più specificatamente, l'hessiano prima introdotto, altro non è che il determinante dell'omonima matrice.

Nel caso di una funzione di n variabile, la matrice hessiana è la seguente matrice quadrata di ordine n .

$$H_f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} \right)$$

Se f è di classe C^2 nel proprio campo di esistenza, allora per il teorema di Schwarz, segue che tale matrice è simmetrica.

Ritornando nel caso $n = 2$, abbiamo:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Quindi l'hessiano della funzione è:

$$H = \det H_f(x, y)$$

Assegnato il punto critico (x_0, y_0) , possiamo valutare la matrice $H_f(x_0, y_0)$:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Abbiamo i seguenti casi:

1. La matrice $H_f(x_0, y_0)$ è definita positiva (\implies i suoi autovalori sono > 0). Allora il punto $P_0(x_0, y_0)$ è un minimo relativo.
2. La matrice $H_f(x_0, y_0)$ è definita negativa (\implies i suoi autovalori sono < 0). Allora il punto $P_0(x_0, y_0)$ è un massimo relativo.
3. La matrice $H_f(x_0, y_0)$ è indefinita (\implies i suoi autovalori sono sia positivi che negativi). Allora il punto $P_0(x_0, y_0)$ è un *punto di sella*.
4. Se $H_f(x_0, y_0)$ è semidefinita, il teorema non dice nulla sulla natura del punto P_0 .

1.2 Estremi assoluti

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, essendo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (campo o dominio). Ci proponiamo di determinare gli eventuali estremi assoluti della funzione f nel suo insieme di definizione A .

Osserviamo a tale proposito che il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza degli estremi assoluti di f , soltanto se A è un dominio limitato e f è ivi continua. Evidentemente:

$$P_0 \text{ è punto di massimo [minimo] } \left. \begin{array}{l} \text{assoluto} \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{l} P_0 \text{ è punto di massimo [minimo] } \\ \text{relativo} \end{array} \right)$$

Da ciò segue che i punti di estremo assoluto cadono nei punti estremali o in punti dove la funzione non è parzialmente derivabile.

Consideriamo quindi i due insiemi:

$$J_1 = \left\{ P \in \overset{\circ}{A} \mid f \text{ non è parzialmente derivabile} \right\}$$

$$J_2 = \left\{ P \in \overset{\circ}{A} \mid \nabla f = \mathbf{0} \right\},$$

cioè J_2 è l'insieme dei punti critici interni ad A .

Se esiste il massimo [minimo] assoluto di f in A , necessariamente esso coincide con il massimo [minimo] assoluto di f in $J_1 \cup J_2$ se A è un campo, in $J_1 \cup J_2 \cup \partial A$, se A è un dominio.

In particolare, se A è un dominio limitato ed f è continua, per il teorema di Weierstrass necessariamente esistono minimo e massimo assoluti, che possiamo indicare con m, M . Essi vanno ricercati in $J_1 \cup J_2 \cup \partial A$.

Se invece le ipotesi del teorema di Weierstrass sono violate (A non è un dominio, o è un dominio illimitato, oppure f non è continua), allora non è detto che la funzione sia dotata di estremi assoluti. Essa vanno comunque ricercati in $J_1 \cup J_2$ se A è un campo, in $J_1 \cup J_2 \cup \partial A$, se A è un dominio. Ad esempio, se consideriamo il massimo, tale ricerca può dare esito negativo e in tal caso la funzione è priva di massimo assoluto. Viceversa, in tale insieme di punti esiste il massimo M , che per quanto detto in precedenza è l'unico valore possibile per il massimo della funzione in A . Occorre poi verificare la seguente disuguaglianza: $f(x, y) \leq M$, $\forall (x, y) \in A$.